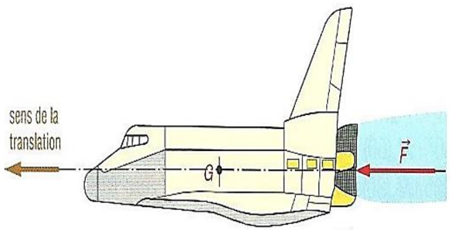
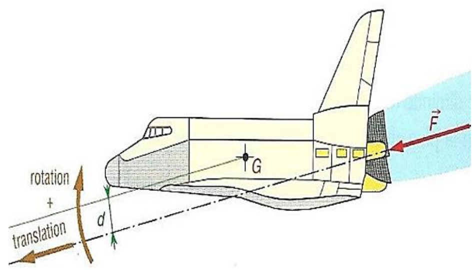
Spécialité SI

Fiche de cours
Modélisation des actions mécaniques
Les moments

1 - Introduction

Les effets d’une force sur un solide dépendent, non seulement de son intensité et de sa direction, mais aussi du **moment qu’elle peut engendrer**.
Le moment d’une force mesure l’effet à causer une **rotation** aux objets sur lesquels elle agit. Elle peut s’exprimer par un scalaire (un nombre) ou un vecteur.





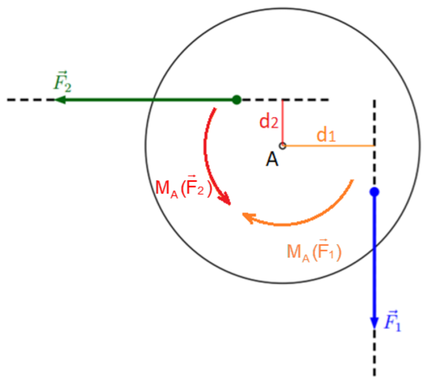
2 - Moment scalaire d’une force par rapport à un point

Définitions :

Le moment d’une force $\vec{F}$ par rapport au point A, noté $M_A(\vec{F})$ est égal au produit du module F de la force par le « bras de levier d » (distance entre le point A et la direction de la force $\vec{F}$) de cette force par rapport au point A : $\boldsymbol{M_A(\vec{F}) = F \cdot d}$

Ce moment est un scalaire, c’est-à-dire un nombre, dont le signe est donné par la convention de signe suivante :

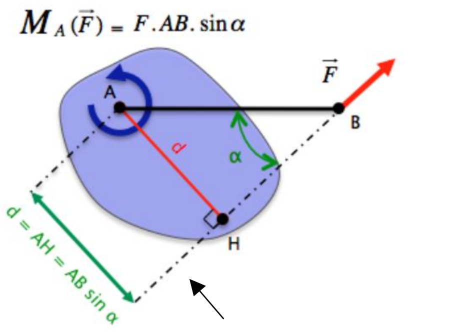
- Si la force $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide sur lequel elle agit dans le **sens trigonométrique** autour de A, le moment est **positif** : $M_A(\vec{F_2}) = F_2 \cdot d_2$
- Le moment est **négatif** si la rotation est dans le **sens des aiguilles d’une montre** : $M_A(\vec{F_1}) = - F_1 \cdot d_1$



Comme l’unité SI de la norme d’une force est le Newton, celle du bras de levier étant le mètre, l’unité SI du moment d’une force est le « **Newton mètre** » (**N·m**). Il peut être aussi exprimé en joules par radian (**J·rad⁻¹**)

Une force de norme F = 1 N, dont le bras de levier vaut a = 1 m exerce donc sur un corps un moment égal à : $M_A(\vec{F})$ *= 1N · 1 m = 1 N·m*

Si on connaît le point B d'application de la force, on pourra aussi calculer le moment par la formule
$M_A(\vec{F}) = F \cdot d = F \cdot AB \cdot \sin\alpha$



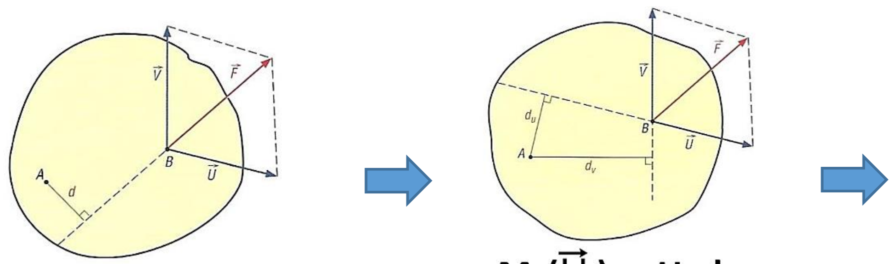
Ligne d'action (ou support) de la force $\vec{F}$

En remarquant que :

- Cette formule reste également valable quel que soit le point B pris sur la ligne d'action de la force.
- Si le point A est situé sur la ligne d'action de la force alors le moment en A de cette force est nul.

Théorème de Varignon

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A est égale à la somme des moments de ses composantes $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par rapport au même point .



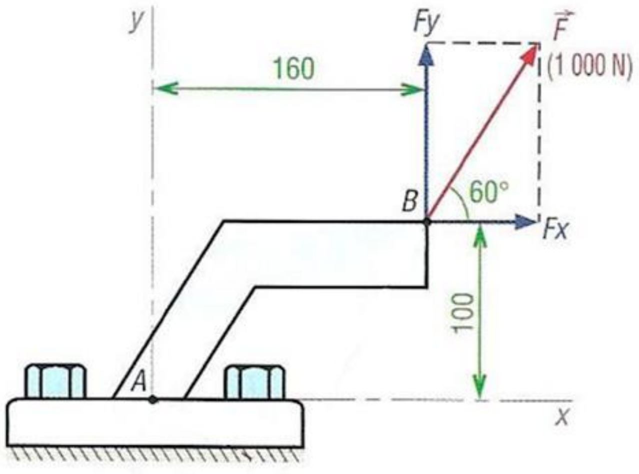
$M_A(\vec{F})$= F.d

$M_A(\vec{U})$= - U. d_U
$M_A(\vec{V})$= V. d_V

$M_A(\vec{F})$= V. d_V - U. d_U

Application :

Dimensionnons le moment $M_A(\vec{F})$ sur la structure suivante. Le point A est au centre du repère, les côtes sont considérées en mm.



Projection de F sur y
Fy = 1000 x sin(60) = 866,025

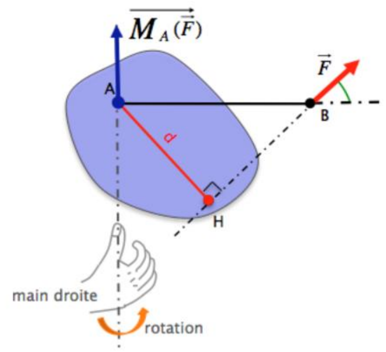
Projection de F sur x
Fx = 1000 x cos(60) = 500

Le bras de levier de la composante Fx est 0,1 m, celui de la composante Fy est 0,16 m. Fx engendre un moment négatif, Fy un moment positif : Il vient :

$M_A(\vec{F}) =$ -500 x 0,1 + 866,025 x 0,160 = 88,564 N·m

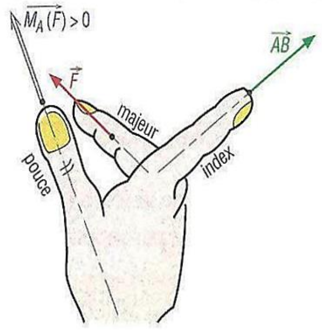
3 - Vecteur moment

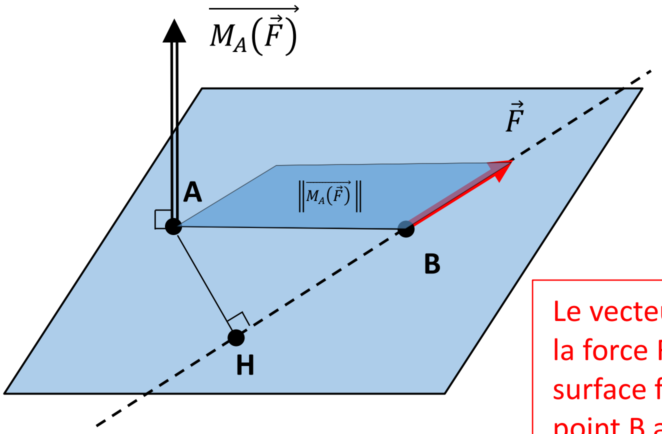
Pour l'étude de systèmes dans l'espace, la notion de moment scalaire ne suffit plus, et on doit le définir autrement, à partir d'un produit vectoriel.



Le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A est défini par $\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$ où B est un point quelconque de la ligne d'action de la force $\vec{F}$. Ce vecteur est défini par :

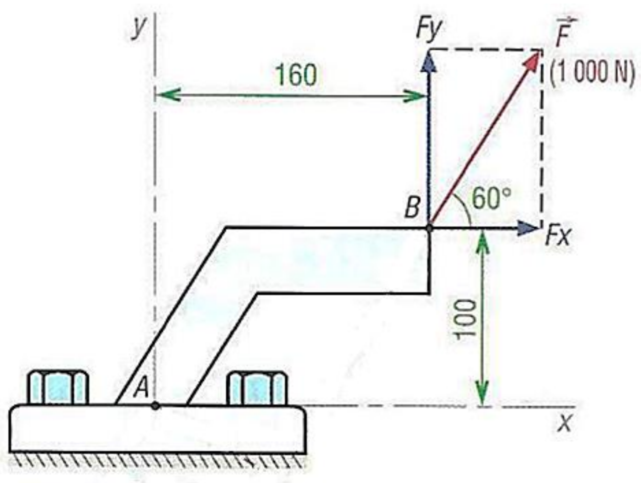
- Son origine : le point A
- Sa direction : la droite perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$
- Son sens : tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{F}, \overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right)$ soit direct
- Son intensité : $\left\|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right\| = \|AB\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F})|$





Le vecteur moment est normal au plan formé par la force F et la droite AB. Sa norme est égale à la surface foncé. Le moment est le même pour tour point B appartenant au support de la force

Application : Reprenons l'exemple précédent et utilisons le produit vectoriel pour définir le vecteur moment $\overrightarrow{M_A(\vec{F})}$



Soit le repère orthonormé direct x, y, z de centre A

Le vecteur moment se définit par $\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$

La force $\vec{F}$ est défini ainsi : $\vec{F}\begin{pmatrix} Fx \\ Fy \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad soit\ \vec{F}\begin{pmatrix} 500 \\ 866{,}025 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour la direction AB, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \begin{pmatrix} 500 \\ 866{,}025 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 866{,}025 \text{ x } 0 - 0 \text{ x } 0{,}1 \\ -500x\ 0 \quad + 0x\ 0{,}16 \\ 500\text{x } 0{,}1 - 866{,}025\text{x}0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -88{,}564 \end{pmatrix}$$

L'intensité de ce vecteur est bien de 88,564 N·m

3 – Application des moments sur l'équilibre d'un solide en rotation

Si la somme des moments de toutes les forces qui s'appliquent à un solide au repos est positive, le solide va commencer à tourner dans le sens positif.

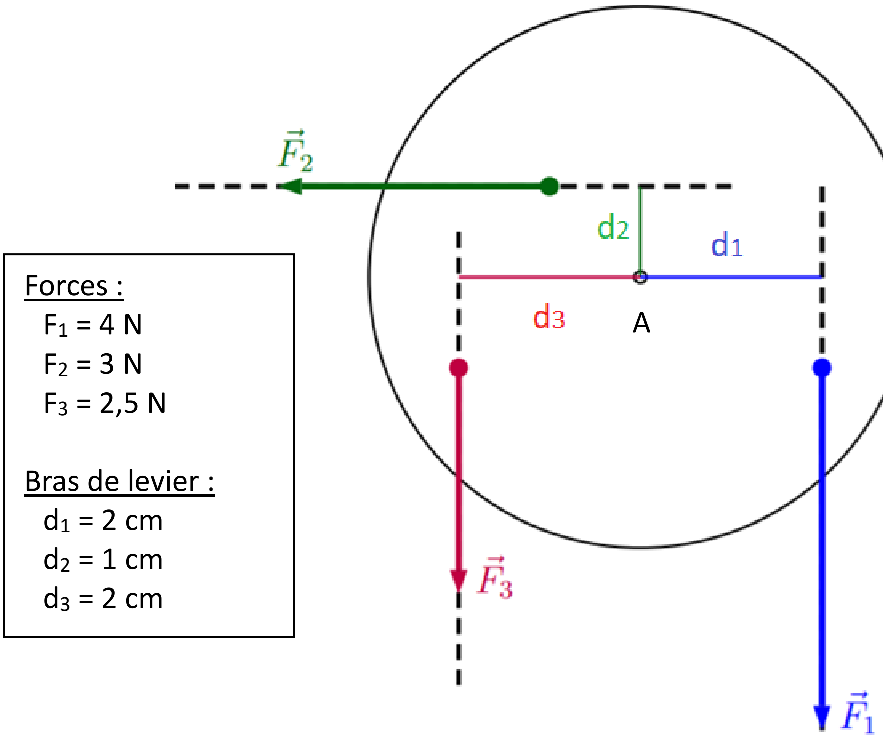
$$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) > 0 \leftrightarrow \text{rotation dans le sens positif}$$

Si la somme des moments de toutes les forces qui s'appliquent à un solide au repos est négative, le solide va commencer à tourner dans le sens négatif.

$$\sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) < 0 \leftrightarrow \text{rotation dans le sens négatif}$$

Il s'en suit la «loi d'équilibre pour un corps en rotation» :

> Un solide qui peut tourner autour d'un axe est en équilibre si et seulement si la somme des moments de toutes les forces qui s'appliquent au solide est nulle.
>
> Équilibre de rotation sans accélération angulaire $\leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} M_A(\vec{F}_i) = 0$



On peut écrire :

$$M_A(\vec{F}_1) = -\,F_1 \cdot d_1 = -\,4\ \text{N} \cdot 2\ \text{cm} = -8\ \text{N}\cdot\text{cm} = -0{,}08\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$M_A(\vec{F}_2) = +\,F_2 \cdot d_2 = 3\ \text{N} \cdot 1\ \text{cm} = 3\ \text{N}\cdot\text{cm} = 0{,}03\ \text{N}\cdot\text{m}$$
$$M_A(\vec{F}_3) = +\,F_3 \cdot d_3 = 2{,}5\ \text{N} \cdot 2\ \text{cm} = 5\ \text{N}\cdot\text{cm} = 0{,}05\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\sum_{i=1}^{3} M_A(\vec{F}_i) = -0{,}08\ \text{N}\cdot\text{m} + 0{,}03\ \text{N}\cdot\text{m} + 0{,}05\ \text{N}\cdot\text{m} = 0\ \text{N}\cdot\text{m}$$

On en déduit que le solide est en équilibre sans accélération angulaire.