Sciences de l'Ingénieur

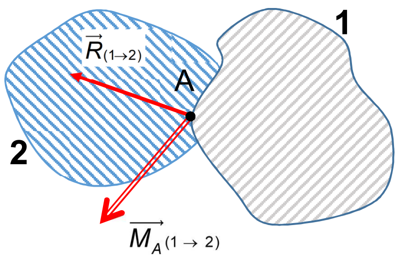
LYCÉE de l'ÉLORN
le choix de votre réussite

LES TORSEURS D'ACTIONS MÉCANIQUES

1. Modélisation d'une action mécanique par un torseur

1.1 Définition

Soit une action mécanique (AM) exercée au point A par un solide 1 sur un solide 2



Pour rappel :

- $\vec{R}_{(1\to2)}$ est la résultante de l'AM de 1→2. Elle modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou compression.
- $\overrightarrow{M_A}_{(1\to2)}$ est le moment résultant de l'AM de 1→2. Il modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de rotation, ou provoque une déformation en torsion ou en flexion.
- Le **moment résultant dépend du point A** choisi (appelé le centre de moment) pour le calcul. La résultante en est indépendante.

Une action mécanique étant définie lorsque ces deux vecteurs sont connus. Nous les regrouperons dans une **entité mathématique appelée Torseur**.

Le torseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 1 sur un solide 2 sera noté :

Composantes de la force résultante | *Composantes du moment résultant en A* | *Base de projection des vecteurs (facultatif)* | *Centre de réduction*

$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} \end{Bmatrix}} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

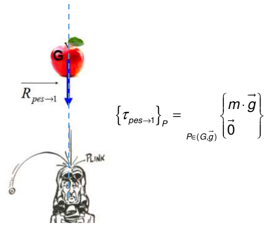
$\vec{R}_{(1\to2)}$ et $\overrightarrow{M_A}_{(1\to2)}$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A$.

1.2 Torseurs particuliers

1.2.1 Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

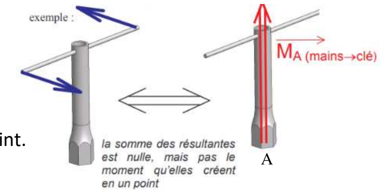
$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}}$$



1.2.2 Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante de la force est nulle.

$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} \neq \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}}$$



Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

1.2.3 Torseur nul

$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Les éléments de réduction d'un torseur nul sont les mêmes en tout point de l'espace.

1.3 Operations entre torseurs

1.3.1 Somme de deux torseurs

Soit : $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}}$

$\left\{\tau_{(3\to1)}\right\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}}$

alors : $\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_A + \left\{\tau_{(3\to1)}\right\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} + \vec{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}}$

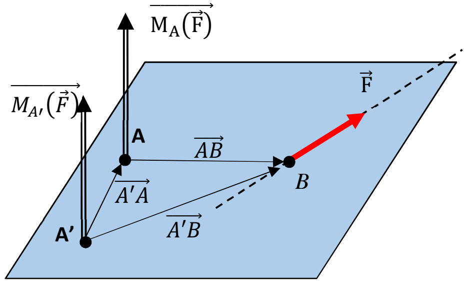
- Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**.
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

1.3.2 Changement de centre de réduction, théorème de transport du moment (Varignon)

Le moment résultant en un point A' peut-être exprimé en fonction des éléments de réduction du torseur en un autre point A. La démonstration est la suivante sachant que le produit vectoriel est distributif :

$$\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{A'B}\wedge\vec{F} = \left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)\wedge\vec{F} = \overrightarrow{A'A}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{F} = \overrightarrow{A'A}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{M_A}$$

On obtient ainsi la relation de changement de centre de moment : $\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{M_A}+\overrightarrow{A'A}\wedge\vec{R}$



Moyen mnémotechnique de la méthode dite « BABAR »

Soit un torseur exprimé au point A

$$\boxed{\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_A = \underset{A}{\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_{A(2\to1)}}\end{matrix}\right\}}}$$

Son écriture au point B sera :

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_B = \underset{B}{\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(2\to1)}\\ \overrightarrow{M_{B(2\to1)}} = \overrightarrow{M_{A(2\to1)}}+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{(2\to1)}\end{matrix}\right\}}$$

B A BA R

Rappel sur le produit vectoriel :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$*. Le produit vectoriel entre* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est* $(\vec{u}\wedge\vec{v})\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-xz'\\xy'-yx'\end{pmatrix}$

2. Principe Fondamental de la Statique

2.1 Principe fondamental de la statique (PFS)

Le Principe Fondamental de la Statique ne s'applique que dans l'une ou l'autre de ces conditions :

- Le système étudié est au repos.
- Le système étudié est en déplacement mais à vitesse constante :
  - en mouvement de translation sans accélération.
  - en mouvement de rotation sans accélération angulaire

Si un ensemble de solides E est à l'équilibre par rapport à un référentiel Galiléen alors la somme des torseurs des actions mécaniques du milieu extérieur sur E est nulle.

$$\left\{\tau_{(E\to\bar{E})}\right\}_A = \underset{A}{\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{(E\to\bar{E})}\\ \overrightarrow{M_{A(E\to\bar{E})}}\end{matrix}\right\}} = \underset{A}{\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}} \quad \forall\ A$$

Le torseur ci-dessus conduit donc à l'écriture de 2 équations vectorielles :

Théorème de la résultante statique : $\vec{R}_{(E\to\bar{E})} = \vec{0}$

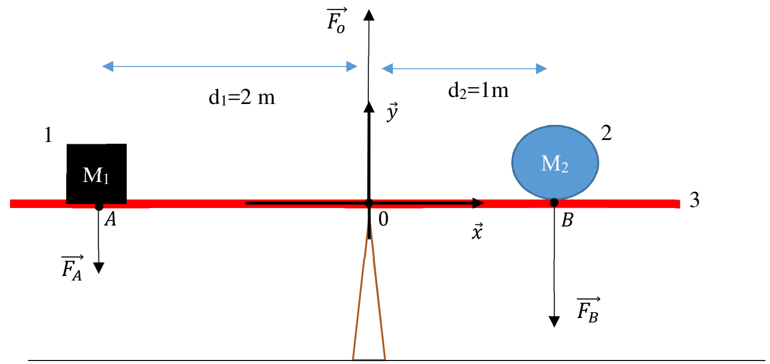
Théorème du moment statique au point A : $\overrightarrow{M_{A(E\to\bar{E})}} = \vec{0}$

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total.

3. Exercices

3.1 Mise en œuvre des torseurs, cas simple.

On considère une balance de centre O placée à l'origine du plan $0,\vec{x},\vec{y}$. La masse du plateau sera négligée dans les calculs. La masse (1) engendre une force $\overrightarrow{F_A}$ de 100 N, on souhaite déterminer l'intensité de la force $\overrightarrow{F_B}$ due à la masse (2) qui assurera la stabilité du plateau (3) connaissant les distances OA et OB.



$\overrightarrow{F_o}$ est la résultante des forces appliquées au point O.
A l'équilibre, toutes les forces n'ont de composantes que sur l'axe $\vec{y}$

a) Compléter l'écriture des torseurs suivants

Nous avons au point A un torseur glisseur (le vecteur moment est nul), la résultante des forces est connue.

$$\{T_{(1\to3)}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to3)} \\ \\ \vec{M}_{A(1\to3)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Au point B :

$$\{T_{(2\to3)}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to3)} \\ \\ \vec{M}_{B(2\to3)} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Au point 0

$$\{T_{(0\to3)}\}_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(0\to3)} \\ \\ \vec{M}_{O(0\to3)} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

b) Procéder à un changement de centre de réduction des torseurs $\{T_{(1\to3)}\}_A$ et $\{T_{(2\to3)}\}_B$ pour exprimer les éléments suivants :

$$\{T_{(1\to3)}\}_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to3)} \\ \\ \vec{M}_{A(1\to3)} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix} \qquad \{T_{(2\to3)}\}_O = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to3)} \\ \\ \vec{M}_{B(2\to3)} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

On rappelle ici le calcul d'un changement de centre de réduction :

Soit :	*Ecriture au point B :*
$\boxed{\{\tau_{(2\to1)}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \vec{M}_{A(2\to1)} \end{Bmatrix}}$	$\{\tau_{(2\to1)}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \vec{M}_{B(2\to1)} = \vec{M}_{A(2\to1)} + \vec{BA}\wedge\vec{R}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}$ B A BA R

c) Déterminer, grâce au Principe Fondamental de la Statique (PFS), l'intensité de la force qui doit être appliquée au point B afin que la balançoire soit en équilibre.