Sciences de l'Ingénieur

Rappels sur les vecteurs et les systèmes de coordonnées

I- Généralités

1.1 Définitions.

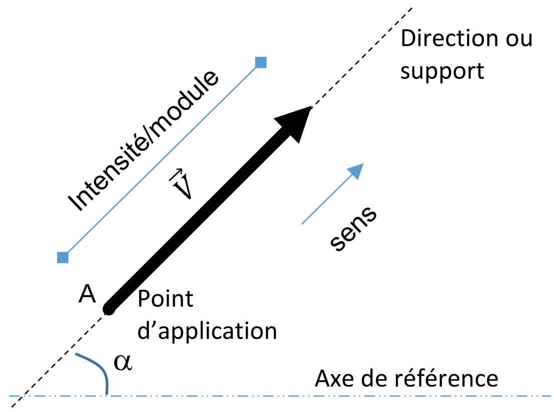
Un vecteur est une grandeur définie par une **direction**, un **sens** et une **intensité**. Tous les éléments caractérisés par une direction, un sens et une intensité seront des vecteurs ; la force, la vitesse, les champs électriques ou magnétiques en sont des exemples.

a) La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par un angle α mesuré entre un axe de référence et le support.

b) Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.

c) L'intensité, **norme ou module**, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation V, $\|\vec{V}\|$ ou parfois $|\vec{V}|$.

d) Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.

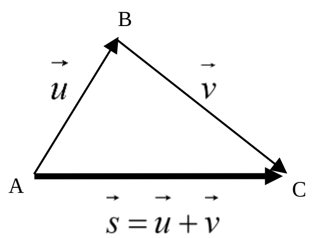


1.2 Propriétés.

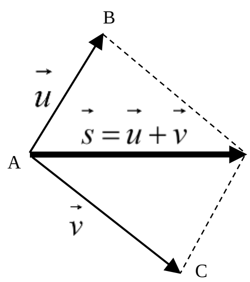
1.2.1 Addition de deux vecteurs.

Cas général :

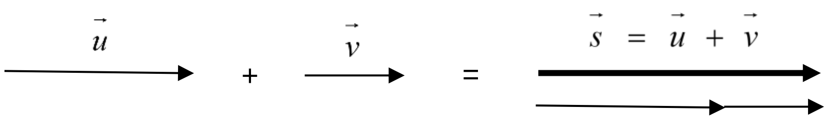
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs représentés respectivement par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\vec{s}$ représenté par $\overrightarrow{AC}$ est appelé vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$



En peut aussi considérer une somme de la manière suivante →

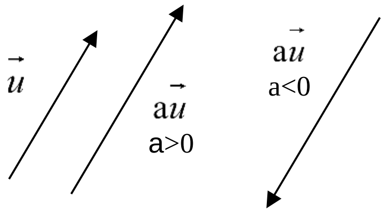


Cas de 2 vecteurs parallèles :



1.2.2 Produit d'un vecteur par un réel.

Soit un vecteur $\vec{u}$ représentés par $\overrightarrow{AB}$ et un réel a. Si a est positif a$\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction et même sens. Si a est négatif a$\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction mais sont de sens contraire.

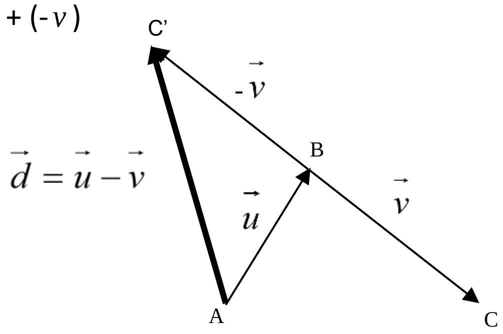


1.2.3 Vecteurs colinéaires.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires, s'ils existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont alors la même direction.

1.2.4 Soustraction de vecteurs.

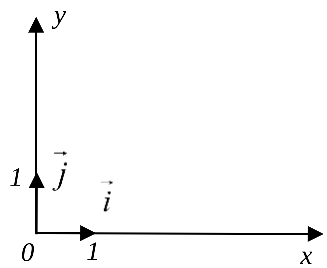
La différence entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé ($-\vec{v}$)
On écrit $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



II- Coordonnées.

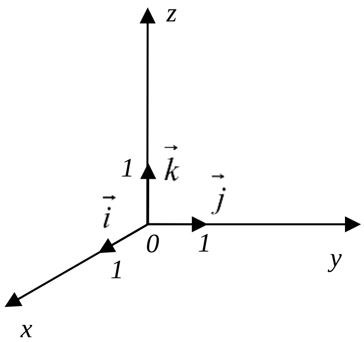
2.1 Repère dans le plan, repère orthonormé.

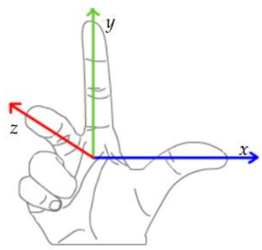
Un repère du plan est déterminé par un point quelconque O, appelé origine du repère, et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.
Le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est orthogonal si les droites qui portent les vecteurs sont orthogonales. Il est **orthonormal** si, en plus, les vecteurs ont même longueur, celle-ci étant prise comme unité de longueur (on parle alors de **repère orthonormé**).



2.2 Repère dans l'espace.

Soit un repère de l'espace où l'on désigne par O un point quelconque et par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 3 vecteurs non colinéaires 2 à 2 et non coplanaires 2 à 2.

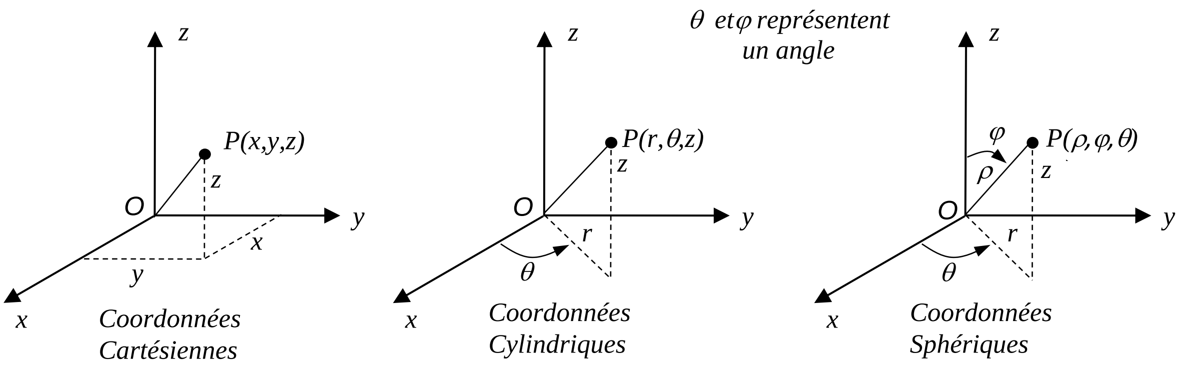




En Sciences Industrielles on note plutôt la base de travail avec le nom des axes soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au lieu $(\vec{i}, \vec{i}, \vec{k})$

2.3 Les différents systèmes de coordonnées.

Un point P est définissable par trois coordonnées *(x,y,z)* dans le système Cartésien, *(r,θ,z)* dans le système cylindrique et *(ρ,φ,θ)* dans le système sphérique. Nous utiliserons massivement les coordonnées Cartésiennes en SI.



Cartésiennes ↔ Cylindriques : $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$

Précision : Ces notations ne sont pas celles usuellement utilisées en physique où l'usage général est d'inverser les définitions de φ et θ.

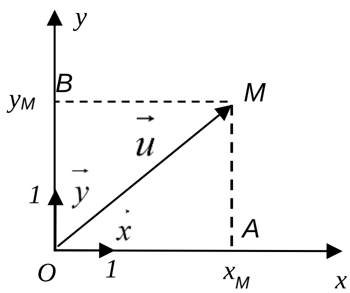
Cartésiennes ↔ Sphériques : $\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctan\frac{y}{x} \\ \theta = arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$

Cylindriques ↔ Sphériques : $\begin{cases} r = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \\ \theta = \theta \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \varphi = arctan\frac{r}{z} \end{cases}$

2.4 Coordonnées Cartésiennes d'un point, d'un vecteur.

2.4.1 Dans le plan

A partir de la relation de Chasles qui donne dans la figure ci-contre $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, on démontre facilement que $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{x} + y_M \vec{y}$. Si $\overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\vec{u}$ on dit qu'ils sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base β($\vec{x}$, $\vec{y}$).



On notera indifféremment $\vec{u}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}_\beta$ ou $\vec{u} = x_M \vec{x} + y_M \vec{y}$ ou $\vec{u} = (x_M, y_M)$

Propriétés

• Norme d'un vecteur dans un repère orthogonal.
Le triangle OAM étant rectangle A, nous pouvons écrire :

$OM^2 = OA^2 + AM^2 = OA^2 + OB^2$ comme AM=OB On en déduit que si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\beta$ alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Somme de deux vecteurs.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\beta$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\beta$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}_\beta$

• Coordonnées d'un vecteur défini par un représentant.

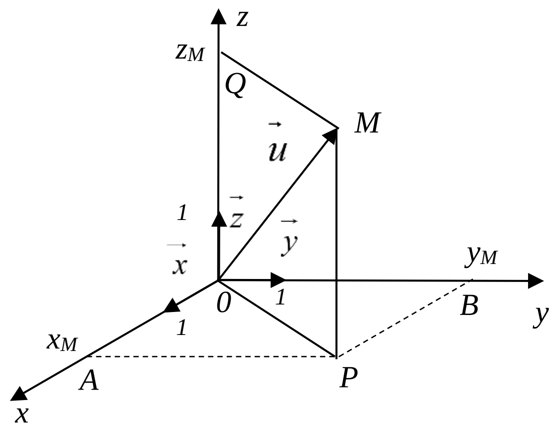
Soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}_\beta$

• Vecteur nul.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\beta = \vec{0}$ si $x = y = 0$ Ce vecteur n'a ni direction, ni sens.

• Egalité.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\beta = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_\beta$ si $x = x', y = y'$

2.4.2 Dans l'espace

Les trois éléments (x_M, y_M, z_M) forment les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Si $\overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\vec{u}$ on dit qu'ils sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\beta(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



On notera indifféremment

$\vec{u}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}_\beta$ ou $\vec{u} = x_M\vec{x} + y_M\vec{y} + z_M\vec{z}$ ou $\vec{u} = (x_M, y_M, z_M)$

Propriétés

• Norme d'un vecteur dans un repère orthogonal.
Les triangles OPM et OAP étant rectangles en P et en A, nous pouvons écrire :
$OM^2 = OP^2 + PM^2$ $OP^2 = OA^2 + AP^2 = OA^2 + OB^2$ comme PM=OQ il vient $OM^2=OA^2+OB^2+OQ^2$

On en déduit que si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta$ alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

• Somme de deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_\beta$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}_\beta$

• Coordonnées d'un vecteur défini par un représentant.

Soit deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

Sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ on en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_\beta$

• Vecteur nul.

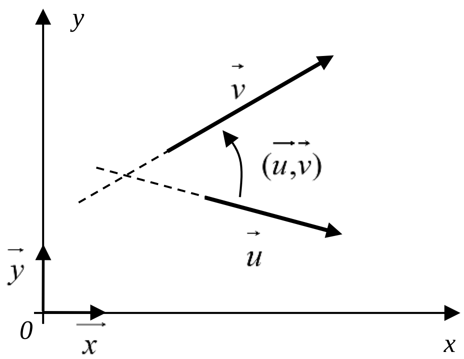
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta = \vec{0}$ si $x = y = z = 0$ Ce vecteur n'a ni direction, ni sens.

III- Produit scalaire.

3.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre (un scalaire) qui est égal au produit des longueurs des deux vecteurs par le cosinus de l'angle de ces deux vecteurs.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$



3.2 Propriétés

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ commutativité, symétrie.

• $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}).\vec{v} = \overrightarrow{u_1} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{u_2} \cdot \vec{v}$ distributivité par rapport à l'addition vectorielle.

3.3 Expression analytique du produit scalaire.

a) ***Dans un plan orthonormé*** $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

On peut écrire $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = 1$ et $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \vec{0}$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Conséquence : si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u})^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 + y^2$ d'où $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) ***Dans une base orthonormée*** $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$

On peut écrire $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z} \cdot \overrightarrow{z} = 1$ et $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z} = 0$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

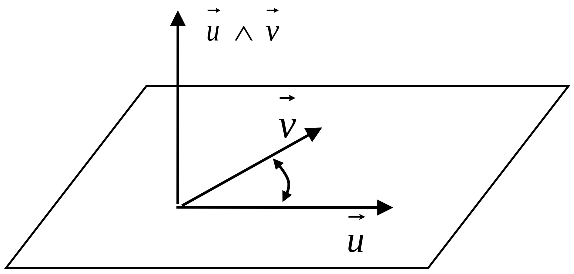
D'où on déduit comme précédemment $\left\|\vec{u}\right\|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

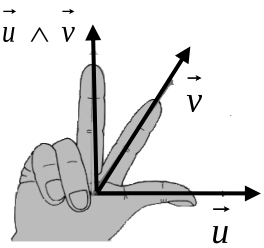
IV- Produit vectoriel.

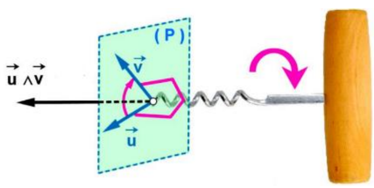
Le produit vectoriel de deux vecteurs engendre un autre vecteur situé dans un plan différent. En conséquences nous considèrerons uniquement ici les vecteurs à trois composantes c'est-à-dire de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui est défini de la manière suivante :







- La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est celle de la perpendiculaire au plan défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est celui obtenu par la *règle des trois doigts de la main droite* (dite aussi du *bonhomme d'Ampère* ou du *tire-bouchon*) : $\vec{u}$ = *pouce*, $\vec{v}$ = *index* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ = *majeur*.
- Le module du produit vectoriel est : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}\,\vec{v})$

4.2 Propriétés

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ commutativité, symétrie.

4.3 Expression analytique du produit vectoriel.

Soit $(O, \overrightarrow{x}, \vec{j}, \overrightarrow{z})$ une base orthonormée directe

On peut écrire : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}$ $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x} = \vec{0}$ $\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{y} = \vec{0}$ $\overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{z} = \vec{0}$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ Le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $(\vec{u} \wedge \vec{v})\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$

<u>V- Exercices.</u>

5.1 Soit un vecteur dirigé du point A (2,-4,1) vers le point M (0,-2,0). Donner ses coordonnées cartésiennes, puis son module.

5.2 Soit les vecteurs $\vec{A}=(3,2,1)$ et $\vec{B}=(1,2,4)$. Donner les composantes de leur produit vectoriel.

5.3 Dans un repère orthonormé on donne les points suivants :

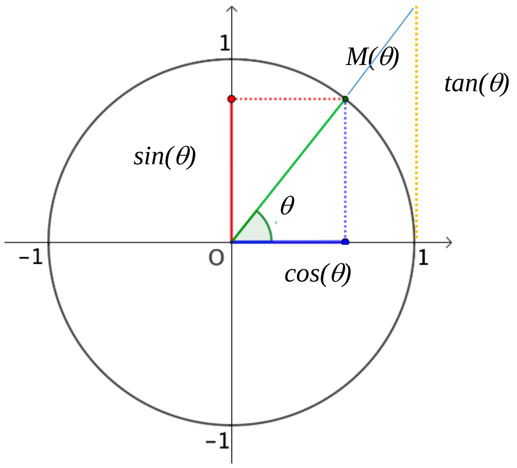
$A(0,1,1)$ $B(1,0,1)$ $C(1,1,0)$

- Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
- Calculer les modules des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire la valeur de l'angle entre ces deux vecteurs.

Annexe : Rappels sur les principales formules en trigonométrie

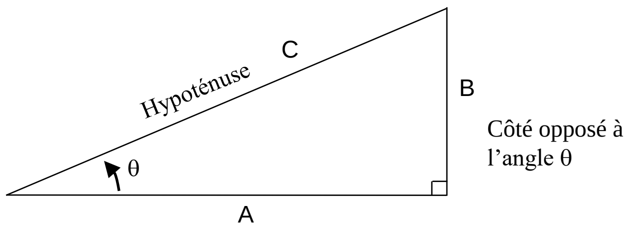
Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre θ (qui est un angle orienté).

- Le cosinus de θ est l'abscisse de M et on note $cos(\theta)$.
- Le sinus de θ est l'ordonnée de M et on note $sin\ (\theta)$.



Trigonométrie dans un triangle rectangle, fonctions trigonométriques

Théorème de Pythagore : $C^2 = A^2 + B^2$



Coté adjacent à l'angle θ

- $Sinus : \quad sin(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{B}{C}$ $\qquad Arcsinus : \quad \theta = arcsin\left(\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}\right) = arcsin\left(\frac{B}{C}\right)$
- $Cosinus : \quad cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{A}{C}$ $\qquad Arccosinus : \quad \theta = arccos\left(\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}\right) = arccos\left(\frac{A}{C}\right)$
- $Tangente : \quad tan(\theta) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{B}{A}$ $\qquad Arctangente : \quad \theta = arctan\left(\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}\right) = arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

Angles remarquables

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$