LYCÉE de l'ÉLORN
le choix de votre réussite

Asservissement
Modélisation
par les fonctions de transfert

1 Représentation par fonction de transfert

1.1 La transformée de Laplace

L'outil mathématique le plus utilisé dans le domaine des asservissements est « La transformée de Laplace ». Il s'agit de substituer à la variable temporelle « t » des fonctions un opérateur *p = α + i β (complexe avec i²=-1).* Ainsi multiplier ou diviser une variable par p revient à la dériver ou à l'intégrer en fonction du temps.

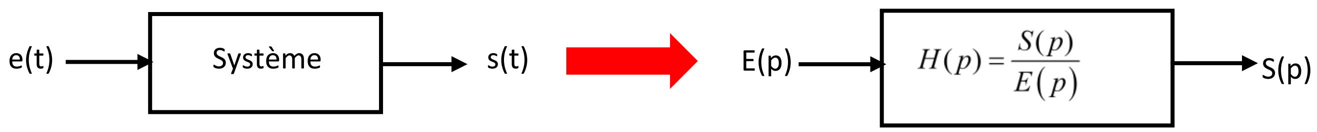
Équation différentielle
$$a_n\frac{d^n s(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0 s(t)=b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0 e(t)$$

Transformée de Laplace

Équation algébrique
$$S(p)\left(a_n p^n+\ldots+a_1 p+a_0\right)=E(p)\left(b_m p^m+\ldots+b_1 p+b_0\right)$$

Ex : Pour $s(t)=2e(t)-0,5\dfrac{ds(t)}{dt}$ → $S(p)=2E(p)-0,5pS(p)$ soit $S(p)=E(p)\dfrac{2}{(1+0,5p)}$

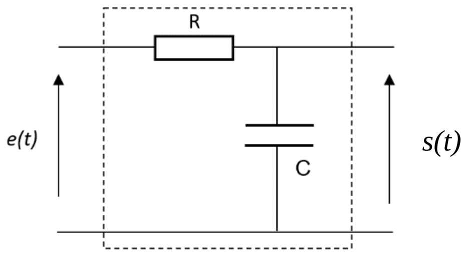
Cette transformation permet de généraliser la notion de fonction de transfert à tout type de système. Nous pourrons **donc tout représenter sous forme d'un schéma bloc.**



1.2 Application : Fonction de transfert d'une cellule RC.

On admet que cette structure a la relation suivante :

$$\boxed{RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)}$$



En négligeant les conditions initiales :

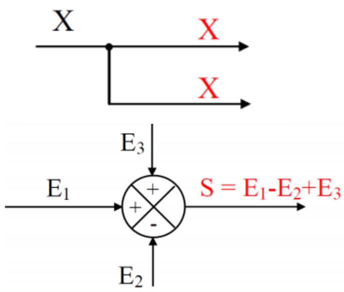
$RC\dfrac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$ devient $RCpS(p)+S(p)=E(p)$

$S(p)\left(RCp+1\right)=E(p)$ soit $S(p)=E(p)\dfrac{1}{1+RCp}$ d'où $\boxed{H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{1}{1+RCp}=\dfrac{1}{1+\tau p}}$

1.3 Les schéma-blocs

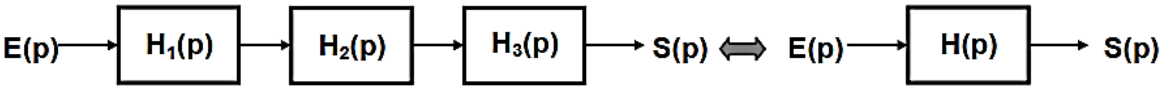
Les éléments d'un schéma-bloc

- Un assemblage série ou parallèle de fonctions de transferts.
- Jonction : Prélèvement d'une grandeur en un point.
- Sommateur : Constitué de 2 ou 3 entrées affectées d'un signe positif ou négatif et d'une sortie.



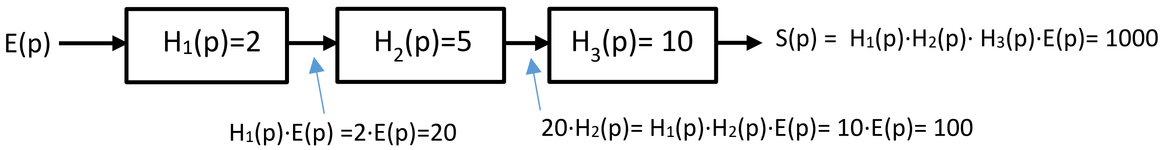
1.4 Fonction de transfert d'éléments en série

Soit une chaîne fonctionnelle de la forme :

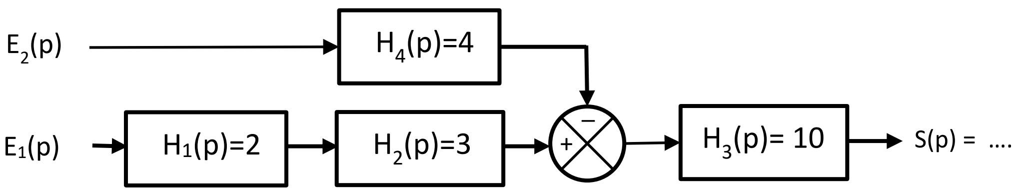


On démontre aisément que $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=H_1(p)\cdot H_2(p)\cdot H_3(p)$

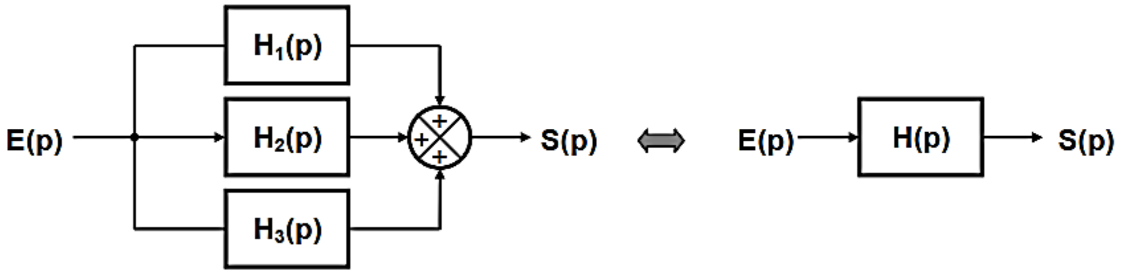
Exemple : ci-dessous, avec E(p)=10 → S(p)=1000



Exprimer S(p) en fonction des éléments du schéma-bloc ci-dessous. Calculer S(p) si $E_1(p)=2$ et $E_2(p)=5$



1.5 Fonction de transfert d'éléments en parallèle

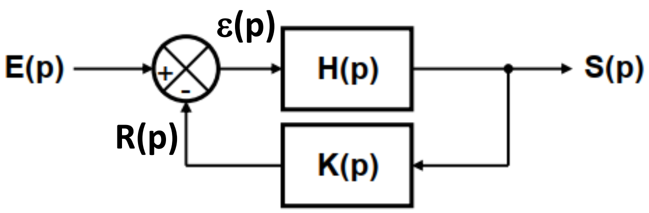


La fonction de transfert de l'ensemble est égale à la somme des fonctions de transfert de chaque bloc.

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=H_1(p)+H_2(p)+H_3(p)$$

1.6 Fonction de transfert d'un système bouclé

Une chaîne bouclée est constituée d'une chaîne d'action ***H(p)*** et d'une chaîne de retour ***K(p)*** :



La fonction de transfert globale est définie par $H_{BF}(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H(p)}{1+H(p)\cdot K(p)}$

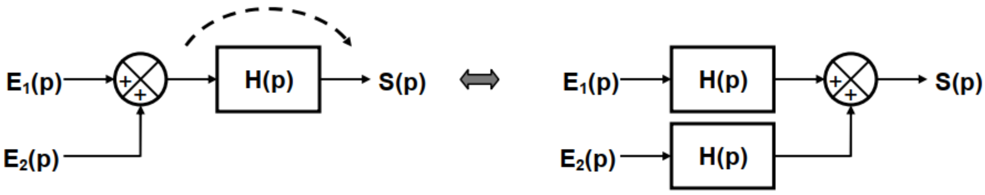
On l'appelle la **fonction de transfert en boucle fermée** (FTBF).

Démonstration :

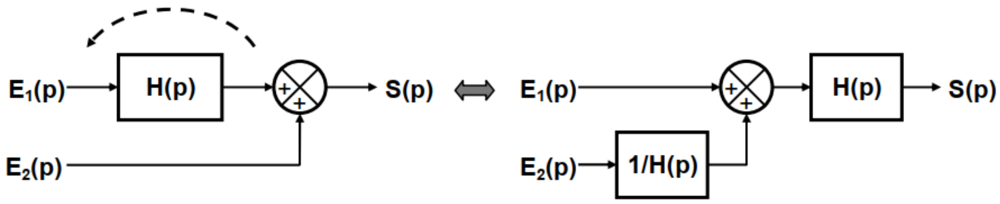
1.7 Schémas blocs équivalent.

Deux schémas bloc sont mathématiquement équivalents si leur fonction de transfert globale est égale.

Exemples de déplacement des sommateurs.

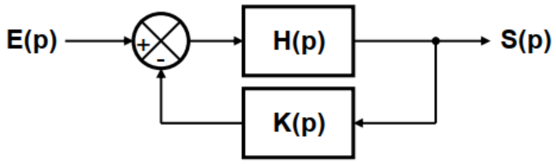


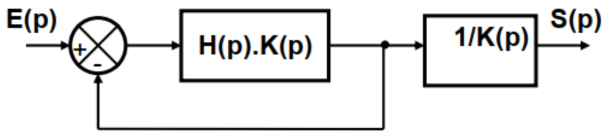
Vérification :



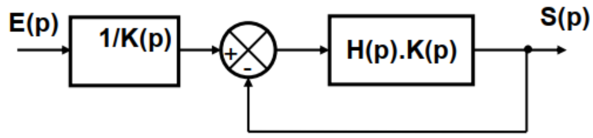
Vérification :

Les systèmes asservis peuvent souvent se ramener à une structure à retour unitaire.
e qui donne dans le cas d'une chaine directe *H(p)* et d'une chaine de retour *K(p)* :





ou



Vérification :

2 Exercices :

2.1 Opération sur les schémas blocs et les fonctions de transferts.

- **a)** Exprimer la fonction de transfert du schéma 1.
- **b)** Rendre le schéma 2 équivalent au schéma 1 en identifiant les fonctions de transferts des blocs $\alpha(p)$ et $\beta(p)$.

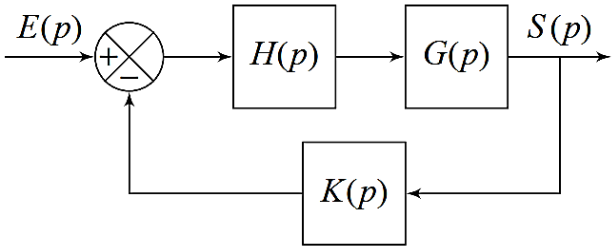


Schéma 1

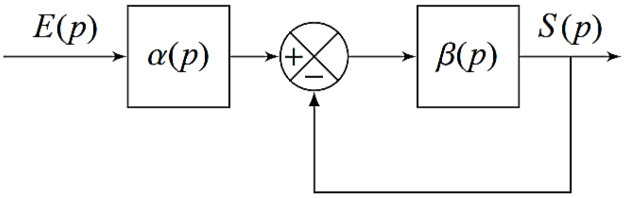
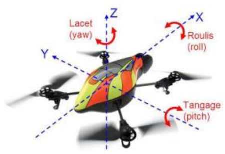


Schéma 2

2.2 Schéma bloc du fichier Simulink de Matlab.



Le schéma-bloc ci-dessus est celui de la chaine directe de l'asservissement du roulis étudié en TP. Dans cet environnement la variable p est notée s (notation anglo-saxonne).

Donner l'écriture de S(p) en fonction de E(p). En déduire l'équation différentielle exprimant s(t) et e(t).