Sciences de l'Ingénieur

LYCÉE de l'ÉLORN
le choix de votre réussite

Fiche de cours

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

1. Définitions, rappels

- Au XVIIe siècle, Galilée énonce un principe simple : *Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement.* Moins d'un siècle après et en ayant bien pris soin de définir ce qu'est une masse, un poids et une force, Isaac Newton formule trois lois fondamentales :
  - **1re loi :** Dans un repère galiléen, tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et n'étant soumis à aucune force extérieures, conserve son mouvement.
  - **2nd loi :** Force = masse x accélération
  - **3me loi :** Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.

- Référentiel absolu : référentiel fixe par rapport à l'univers.
- Référentiel Galiléen : tout référentiel fixe ou en translation rectiligne uniforme (à vitesse constante) par rapport à un référentiel absolu. On le notera R.
- Dans les cas usuels, les référentiels liés à la Terre seront considérés comme Galiléens.

2. Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Le PFD est la traduction des lois de Newton. Il existe au moins un référentiel R, appelé référentiel Galiléen, dans lequel l'ensemble des actions mécaniques extérieures à un ensemble matériel S, est égal à la quantité de masse soumise à une variation de mouvement de S par rapport à R.

Bilan : Le torseur des actions mécaniques extérieures à S = au torseur dynamique de S par rapport à R

$$\{T_{ext\to S}\}_A = \{D_{ext\to S}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to S}} \\ \overrightarrow{M_{A\,(ext\to S)}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\cdot\overrightarrow{\Gamma_G} \\ \vec{\delta}_A \end{Bmatrix}$$

Résultante dynamique : kg x m·s^{-2}

Moment dynamique : N·m

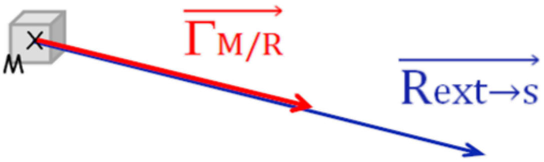
Torseur statique

Torseur dynamique

Quel que soit le point A
On notera Γ, γ ou a l'accélération considérée

2.1 PFD sur un solide « ponctuel », théorème de la résultante dynamique (TRD)

Si le solide (S) de masse m est soumis à des actions extérieures se réduisant à une résultante $\overrightarrow{R_{ext\to S}}$ alors son mouvement est tel que :



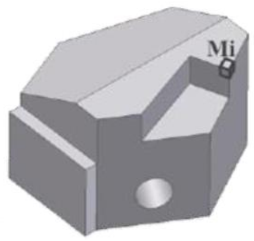
$$\boxed{\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}}$$

Somme des forces extérieures (N) = masse du solide (kg) x accélération (m·s^{-2}) du point M

2.2 PFD sur un solide quelconque

Soit un solide (S) quelconque de masse m. Contrairement au solide précédent, celui-ci peut subir des efforts en différents points. Ceux-ci peuvent le faire tourner, il y aura donc présence de moments.

En appliquant la démonstration précédente à ce solide, il suffirait de considérer celui-ci comme la somme de points Mi, de masses mi.



Si le solide (S) est soumis à des actions mécaniques extérieures quelconques :

$$\{T_{ext\to S}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to S}} \\ \\ \overrightarrow{M_{A\ (ext\to S)}} \end{Bmatrix}$$

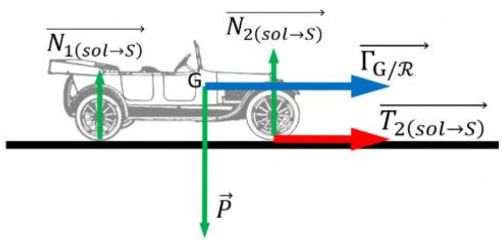
$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{ext\to S}} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} & \rightarrow \text{Résultante mécanique = Résultante dynamique} \\ \\ \overrightarrow{M_{A\ (ext\to S)}} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(m_i \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}}\right) & \rightarrow \text{Moment mécanique = Moment dynamique} \end{cases}$$

3. Cas du mouvement de translation

Soit un solide (S) de masse m de centre d'inertie G en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen R. Soumis à des actions mécaniques extérieures, l'expression du PFD au point G s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{ext\to S}} = \sum m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}} \\ \\ \overrightarrow{M_{G\ (ext\to S)}} = \vec{0} \end{cases}$$

Exemple :



L'ensemble des actions mécaniques exercées sur S s'écrivent :

$$\overrightarrow{R_{ext\to S}} = \vec{P} + \overrightarrow{N_{1(sol\to S)}} + \overrightarrow{N_{2(sol\to S)}} + \overrightarrow{T_{2(sol\to S)}}$$

En projection sur l'axe horizontal le TRD s'écrit : $\overrightarrow{T_{2(sol\to S)}} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$

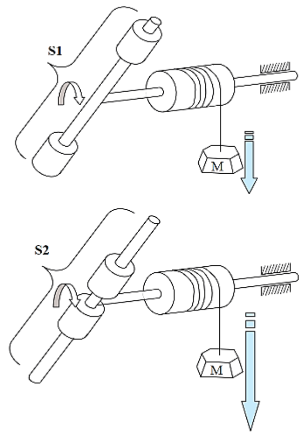
La force de traction $\overrightarrow{T_{2(sol\to S)}}$ est dans le même sens que l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$ qu'elle provoque.

4. Cas du mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

4.1 Moment d'inertie

Dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ , la quantité de masse d'un système matériel S en en mouvement <u>ne dépend pas que de sa masse</u>, mais aussi de sa répartition.

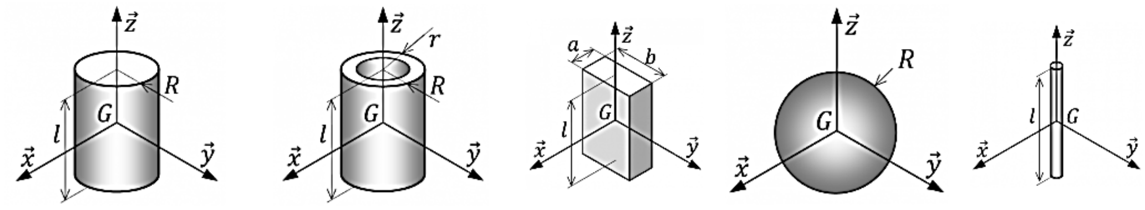
Cette répartition est caractérisée par **le moment d'inertie** de S autour de l'axe Δ, noté J_Δ qui est exprimé en kg·m².



Les deux objets ci-contre sont identiques, hormis la position des masselottes qui est plus éloignée du centre de rotation pour le solide S1.

La masse liée au solide S_2 descend plus vite. Le solide S_2 est plus facile à mettre en mouvement de rotation que S_1. Les deux solides ont pourtant la même masse mais répartie différemment par rapport à l'axe de rotation. S_1 et S_2 n'ont pas le même moment d'inertie

Moments d'inertie des principaux volumes simples



Cylindre	Tube	Parallélépipède	Sphère	Tige
$J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$ $J_{Gz} = \frac{mR^2}{2}$	$J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{m(R^2+r^2)}{4}\ \frac{ml^2}{12}$ $J_{Gz} = \frac{m(R^2+r^2)}{2}$	$J_{Gx} = \frac{m(a^2+l^2)}{12}$ $J_{Gy} = \frac{m(b^2+l^2)}{12}$ $J_{Gz} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$	$J_{Gx} = J_{Gy} = J_{Gz} = \frac{2mR^2}{5}$	$J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{ml^2}{12}$ $J_{Gz} \approx 0$

4.2 Théorème du moment dynamique

Dans le cas de la rotation d'un solide homogène S autour d'un axe de symétrie matérielle fixe $(A, \vec{z})$ appartenant à S, le PFD s'écrit en tout point O de cet axe :

$$\{T_{ext\to S}\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{ext\to S}} \\ \\ \overrightarrow{M_{A\ (ext\to S)}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \\ J_{A\vec{z}}\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{z}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \\ J_{A\vec{z}}\cdot\dot{\omega}\cdot\vec{z}\end{matrix}\right\}$$

avec $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$ = l'accélération angulaire du solide en rotation autour de l'axe fixe $(A, \vec{z})$

Cette accélération angulaire peut aussi se nommer a, α, γ ou Γ

<u>Remarques :</u>

- Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_{ext\to S}} = \vec{0}$
- Théorème du moment dynamique : $\overrightarrow{M_{A\ (ext\to S)}} = J_{A\vec{z}}\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{z}$