Sciences de l'Ingénieur

MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES
Rappels

1. Généralités

Tout mécanisme est sollicité par les actions mécaniques qu'il transmet, transforme, le met en mouvement ou, au contraire, l'en empêche.

1.1. Définition d'une action mécanique

On appelle **A**ction **M**écanique (notée **AM**), toute cause capable de :

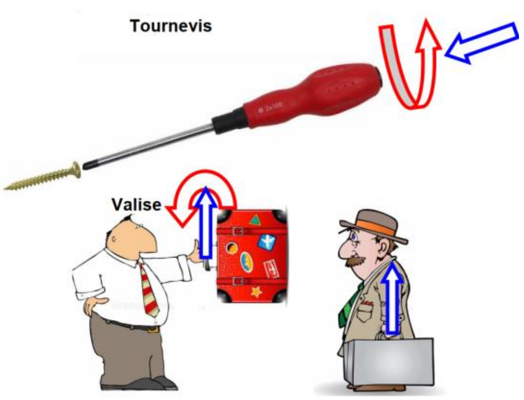
- provoquer et/ou modifier le mouvement d'un solide (étude dynamique),
- maintenir un solide au repos (étude statique),
- déformer un solide (étude de la résistance des matériaux RdM).

Une action mécanique est ainsi caractérisée par **son effet**.
Une AM a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation : i→j (AM de i sur j)

D'une manière générale, une action mécanique modélisée en un point a deux éléments de réduction :

- **Une force résultante** égale à la somme des petites forces réelles. Elle modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou de compression.
- **Un moment résultant** égal à la somme des moments des petites forces réelles. Il modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de rotation, ou provoque une déformation en torsion ou en flexion.

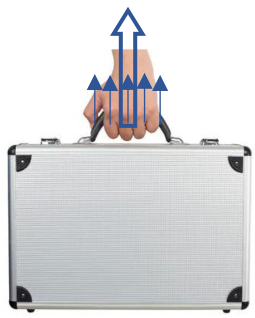
Exemples d'actions mécaniques :



Action de la main sur un tournevis :
La résultante permet de maintenir la tête du tournevis dans l'empreinte de la vis.
Le moment permet de réaliser l'opération de vissage (rotation de la vis).

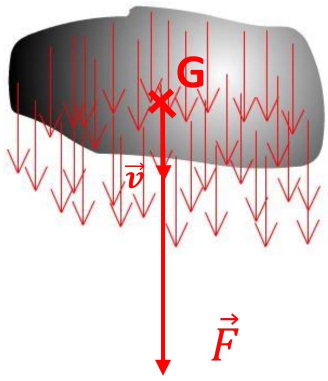
Action du bras sur la valise :
Le personnage de droite n'exerce qu'une **résultante** pour porter sa valise. Celui de gauche exerce la même résultante mais également **un moment** qui s'oppose à la rotation de la valise.

On utilise le terme « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les AM réparties au niveau du contact entre les deux solides. Dans l'exemple ci-contre, la main n'exerce pas une force sur un point unique mais sur toute la surface de contact avec la poignée.



1.2. Quelques cas particuliers de modélisation d'actions mécaniques

1.2.1. Action mécanique de pesanteur

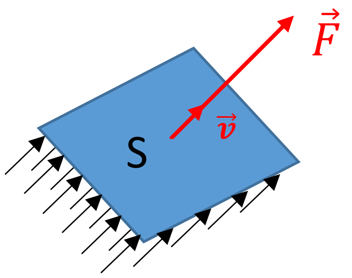


L'action de pesanteur, sur un système matériel, correspond à une infinité de petites forces toutes orientées vers le bas et appliquées à chaque petit élément de matière du système.
Pour la modélisation de l'action mécanique de pesanteur, il est convenu d'exprimer la résultante des forces et de réduire l'action mécanique en G, le centre de masse du système matériel.

$$\vec{F}_{pesanteur \rightarrow solide} = mg\vec{v}$$

- *P : exprimée en newtons (N),*
- *$\vec{v}$: un vecteur unitaire vertical descendant,*
- *m : masse du système matériel exprimée en kilogrammes kg,*
- *g : accélération de pesanteur exprimée en mètres par seconde carré ($m{\cdot}s^{-2}$), usuellement g=9,81 $m{\cdot}s^{-2}$.*

1.2.2. Action mécanique pour un contact surfacique fluide/solide ou solide/fluide

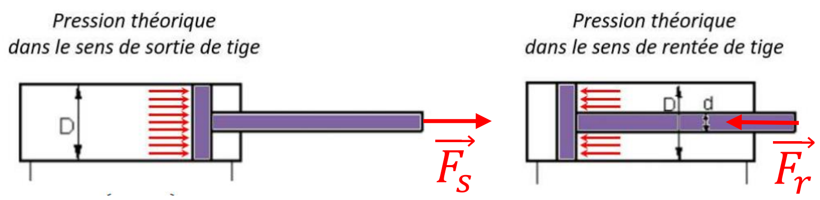


Dans le cas d'un contact surfacique plan, une quantité infinie d'efforts élémentaires s'exercent au contact et forment ce que l'on appelle la pression. Si cette pression est uniforme on peut la remplacer par un effort appliqué au centre géométrique de la surface de contact

$$\vec{F}_{surfacique \rightarrow solide} = pS\vec{v}$$

Avec p la pression en Pa, S la surface en m² et $\vec{v}$ *un vecteur unitaire normal à la surface de contact.*

Application dans les composants appelés vérins pneumatiques ou hydrauliques :



Unités de pression usuelles :

- le Pascal (Pa) est égal à un Newton par mètre carré, 1 Pa = 1 $N{\cdot}m^{-2}$,
- le Méga Pascal (MPa) : 1 MPa = 10^6 Pa = 1 $N{\cdot}mm^{-2}$,
- le bar (bar) est égal à 10^5 Pa.   1 daN = 10 N = 1 $bar{\cdot}cm^2$.

1.2.3. Action mécanique d'un ressort

L'action mécanique d'un ressort sur un solide se modélise par un effort appelé tension qui dépend des caractéristiques du ressort :

$$\vec{F}_{ressort \rightarrow solide} = \pm k(l - l_0)\vec{v}$$

- *k : raideur du ressort exprimée en $N{\cdot}m^{-1}$,*
- *l : longueur du ressort déformé (en m),*
- *l_0 : longueur initiale du ressort,*
- *$\vec{v}$: un vecteur unitaire vertical descendant.*

1.2.4. Action mécanique pour un solide immergé dans un fluide

L'action mécanique de poussée d'Archimède est l'effort particulier que subit un corps plongé dans un fluide et soumis à un champ de gravité. Cet effort provient de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur, il est appliqué au centre de poussée du solide :

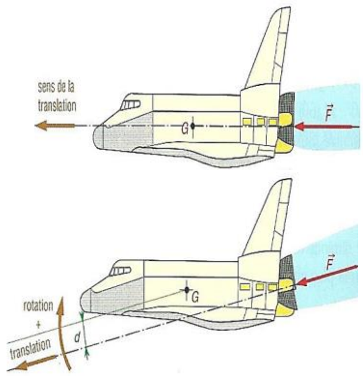
$$\vec{F}_{Archimede \to solide} = \rho V g \vec{v}$$

- *ρ : masse volumique du fluide en kg·m^{-3},*
- *V : volume du fluide déplacé en m^{3},*
- *g : accélération de pesanteur,*
- *$\vec{v}$: un vecteur unitaire vertical ascendant.*

2. Expression d'un moment

2.1. Description

Les effets d'une force sur un solide dépendent, non seulement de son intensité et de sa direction, mais aussi du moment qu'elle peut engendrer.
Le moment d'une force mesure l'effet à causer un effet de **rotation (ou de torsion)** aux objets sur lesquels elle agit. Elle peut s'exprimer par un scalaire ou un vecteur.

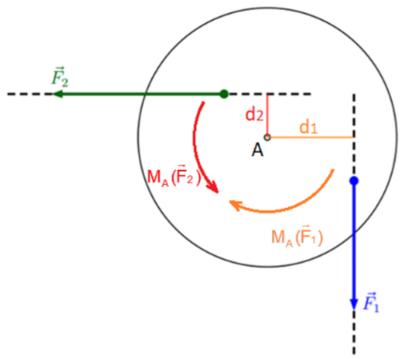


2.2. Moment scalaire d'une force par rapport à un point

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport au point A, noté $M_A(\vec{F})$ est égal au produit du module $F=\|\vec{F}\|$ de la force par le « bras de levier » d de cette force par rapport au point A : $M_A(\vec{F}) = F \cdot d$

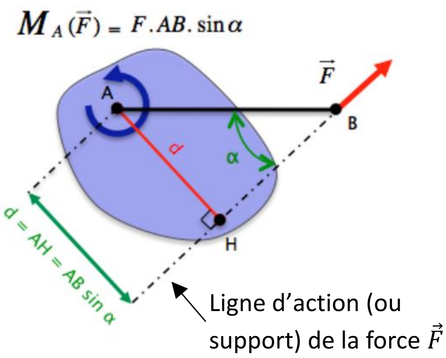
Ce moment est un scalaire, c'est-à-dire un nombre, dont le signe est donné par la convention de signe suivante :

- *Si la force $\vec{F}$ tend à faire tourner le solide sur lequel elle agit dans le sens trigonométrique autour de A, le moment est positif : $M_A(\vec{F}_2) = F_2 \cdot d_2$*
- *Le moment est négatif si la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre : $M_A(\vec{F}_1) = - F_1 \cdot d_1$*
- L'unité SI du moment d'une force est le « **Newton mètr**e » (**N·m**). Il peut être aussi exprimé en joules par radian (**J·rad^{-1}**)



Une force de norme F = 1 N, dont le bras de levier vaut a = 1 m exerce donc sur un corps un moment égal à : $M_A(\vec{F})$ = 1N · 1 m = 1 N·m.

Si on connaît le point B d'application de la force, on pourra aussi calculer le moment par la formule $M_A(\vec{F}) = F \cdot d = F \cdot AB \cdot \sin\alpha$

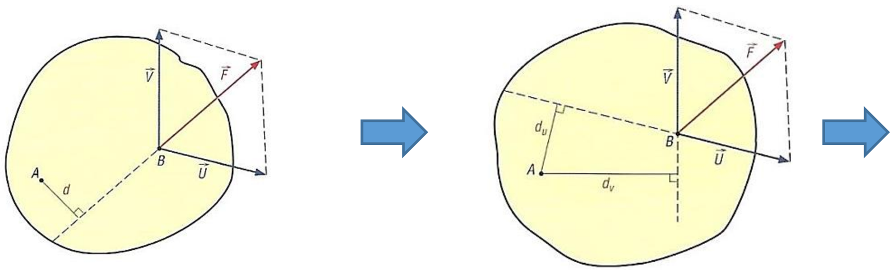


En remarquant que :

- Cette formule reste également valable quel que soit le point B pris sur la ligne d'action de la force.
- Si le point A est situé sur la ligne d'action de la force alors le moment en A de cette force est nul.

Théorème de Varignon

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A est égale à la somme des moments de ses composantes $\vec{U}$ et $\vec{V}$ par rapport au même point .



$$M_A(\vec{F}) = V \cdot d_v - U \cdot d_u$$

$$M_A(\vec{F}) = F \cdot d$$

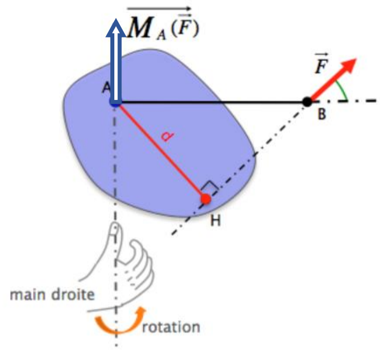
$$M_A(\vec{U}) = -U \cdot d_u$$
$$M_A(\vec{V}) = V \cdot d_v$$

2.3. Vecteur moment

Pour l'étude de systèmes dans l'espace, la notion de moment scalaire ne suffit plus, on doit le définir à partir d'un produit vectoriel.

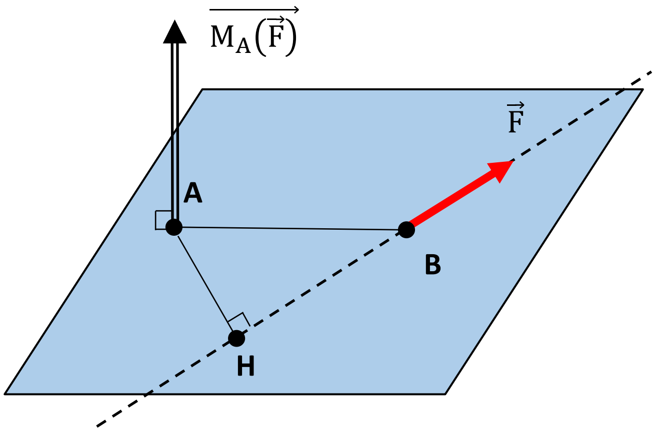
Le vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point A est défini par

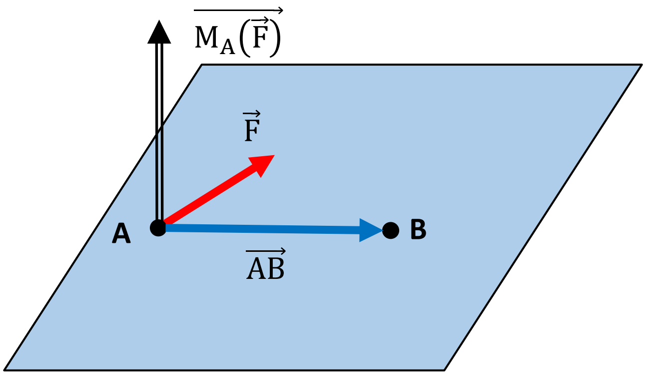
$\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$ où B est un point quelconque de la ligne d'action de la force $\vec{F}$.

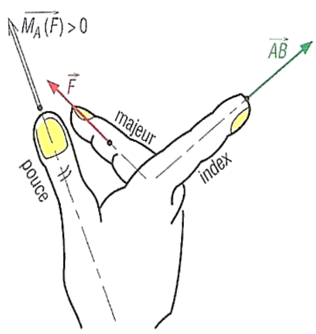


Ce vecteur est défini par :

- Son origine : le point A
- Sa direction : la droite perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}$
- Son sens : tel que le trièdre $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{F}, \overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right)$ soit direct
- Son intensité : $\left\|\overrightarrow{M_A(\vec{F})}\right\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F})|$



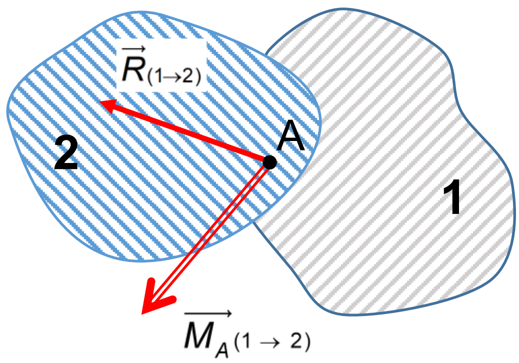




3. Modélisation d'une action mécanique par un torseur

3.1. Définition

Soit une action mécanique exercée au point A par un solide 1 sur un solide 2



Pour rappel :

- $\vec{R}_{(1\to2)}$ est la résultante de l'AM de 1→2. Elle modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou compression.
- $\overrightarrow{M}_{A\,(1\to2)}$ est le moment résultant de l'AM de 1→2. Il modélise la part de l'action mécanique qui crée ou modifie un mouvement de rotation, ou provoque une déformation en torsion ou en flexion.
- Le **moment résultant dépend du point A** choisi (appelé le centre de moment) pour le calcul. La résultante en est indépendante.

Une action mécanique étant définie lorsque ces deux vecteurs sont connus. Nous les regrouperons dans une **entité mathématique appelée Torseur**.

Le torseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 1 sur un solide 2 sera noté :

Composantes de la force résultante

Composantes du moment résultant en A

Base de projection des vecteurs (facultatif)

$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} \\ \overrightarrow{M}_{A\,(1\to2)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Centre de réduction

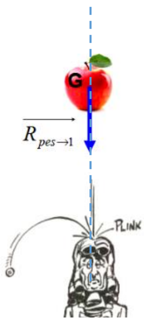
$\vec{R}_{(1\to2)}$ et $\overrightarrow{M}_{A\,(1\to2)}$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A$.

3.2. Torseurs particuliers

3.2.1. Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

$$\left\{\tau_{(1\to2)}\right\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(1\to2)} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{A\,(1\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}$$

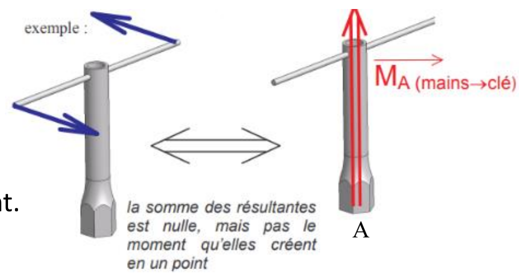


$$\left\{\tau_{pes\to1}\right\}_P = {}_{P\in(G,\vec{g})}\begin{Bmatrix} m\cdot\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

3.2.2. Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante de la force est nulle.

$$\{\tau_{(1\to2)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(1\to2)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} \neq \vec{0} \end{Bmatrix}} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}}$$



Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

3.2.3. Torseur nul

$$\{\tau_{(1\to2)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(1\to2)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}_{(1\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

Les éléments de réduction d'un torseur nul sont les mêmes en tout point de l'espace.

3.3. Operations entre torseurs

3.3.1. Somme de deux torseurs

Soit : $\{\tau_{(2\to1)}\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}}$

$\{\tau_{(3\to1)}\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}}$

alors : $\{\tau_{(2\to1)}\}_A + \{\tau_{(3\to1)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(2\to1)} + \overrightarrow{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} + \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}}$

- Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**.
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

3.3.2. Multiplication d'un torseur par un scalaire

Soit $\{\tau_{(2\to1)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}}$ alors $\lambda \times \{\tau_{(2\to1)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \lambda \times \overrightarrow{R}_{(2\to1)} \\ \lambda \times \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}}$

3.3.3. Égalité de deux torseurs

Soit :

alors : $\{\tau_{(2\to1)}\}_A = \{\tau_{(3\to1)}\}_A = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_{(2\to1)} = \overrightarrow{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_A}_{(2\to1)} = \overrightarrow{M_A}_{(3\to1)} \end{Bmatrix}}$

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_{A\,(2\,\to\,1)}} \end{Bmatrix}_A$$

$$\left\{\tau_{(3\to1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3\to1)} \\ \overrightarrow{M_{A\,(3\,\to\,1)}} \end{Bmatrix}_A$$

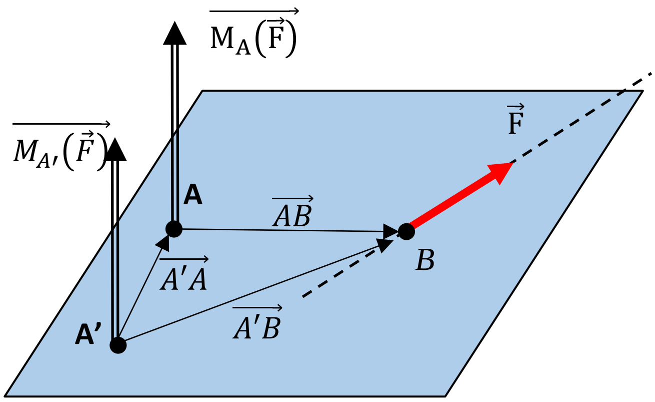
- Deux torseurs sont égaux s'ils ont la même résultante et le même moment **au même centre de réduction**
- Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

3.3.4. Changement de centre de réduction, théorème de transport du moment (Varignon)

Le moment résultant en un point A' peut-être exprimé en fonction des éléments de réduction du torseur en un autre point A. La démonstration est la suivante sachant que le produit vectoriel est distributif :

$$\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{A'B} \wedge \vec{F} = \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}\right) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{M_A}$$

On obtient ainsi la relation de changement de centre de moment : $\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{R}$



Moyen mnémotechnique de la méthode dite « BABAR »

Soit un torseur exprimé au point A

$$\boxed{\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_{A\,(2\,\to\,1)}} \end{Bmatrix}_A}$$

Son écriture au point B sera :

$$\left\{\tau_{(2\to1)}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2\to1)} \\ \overrightarrow{M_{B\,(2\,\to\,1)}} = \overrightarrow{M_{A\,(2\,\to\,1)}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{(2\to1)} \end{Bmatrix}_B$$

B	A	BA	R

4. Principe Fondamental de la Statique

4.1. Principe fondamental de la statique (PFS)

Le Principe Fondamental de la Statique ne s'applique que dans l'une ou l'autre de ces conditions :

- Le système étudié est au repos.
- Le système étudié est en déplacement mais à vitesse constante :
  - en mouvement de translation sans accélération.
  - en mouvement de rotation sans accélération angulaire

Si un ensemble de solides E est à l'équilibre par rapport à un référentiel Galiléen alors la somme des torseurs des actions mécaniques du milieu extérieur sur E est nulle.

$$\left\{\tau_{(E\to\bar{E})}\right\}_A = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}_{(E\to\bar{E})}\\ \overrightarrow{M}_{A(E\to\bar{E})}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \quad \forall\ A$$

Le torseur ci-dessus conduit donc à l’écriture de 2 équations vectorielles :

Théorème de la résultante statique : $\vec{R}_{(E\to\bar{E})} = \vec{0}$

Théorème du moment statique au point A : $\overrightarrow{M}_{A(E\to\bar{E})} = \vec{0}$

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total.