LYCÉE de l'ÉLORN
le choix de votre réussite

ÉTUDE DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES

1. Définitions

1.1. Objet de la cinématique

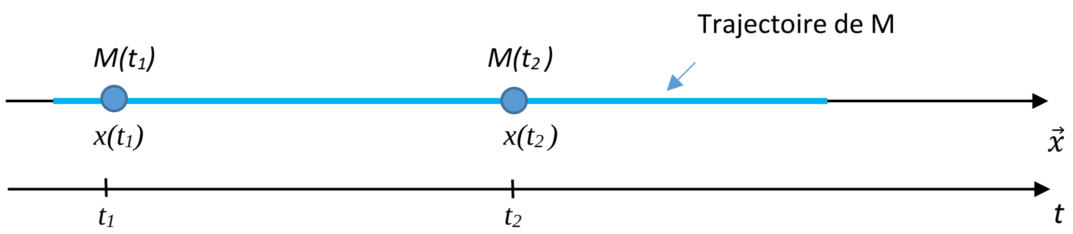
La cinématique est la partie de la mécanique qui permet de décrire et d'étudier les mouvements des solides indépendamment des causes qui les provoquent.

1.2. Notion de solide indéformable

Lorsqu'un objet ou un système est soumis à des efforts, il peut subir, suivant la nature du matériau de grandes ou de petites déformations. Dans nos études, tous les matériaux seront considérés comme indéformables.

Hypothèse : On considère deux points *A* et *B* d'un solide indéformable noté *S*. $\forall A, B \in S, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{constante}$

1.3. Principales caractéristiques d'études, exemple d'un mouvement rectiligne



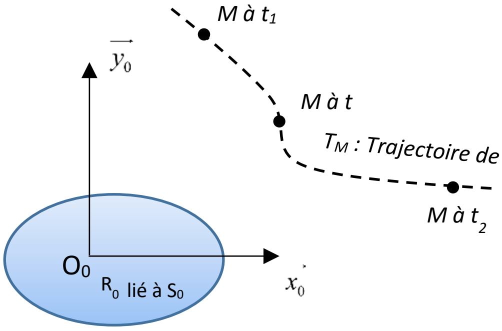
On peut caractériser pour le point M :

- Sa trajectoire : Le déplacement du point M se fait sur une droite.
- Sa position linéaire : $x(t)$ en m
- Sa vitesse moyenne : $v_{moy} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
- Sa vitesse instantanée : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dot{x}$
- Son accélération moyenne : $a_{moy} = \dfrac{v(t_2) - v(t_2)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
- Son accélération instantanée : $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$

2. Trajectoire, vecteurs caractérisant le mouvement

2.1. Trajectoire d'un point

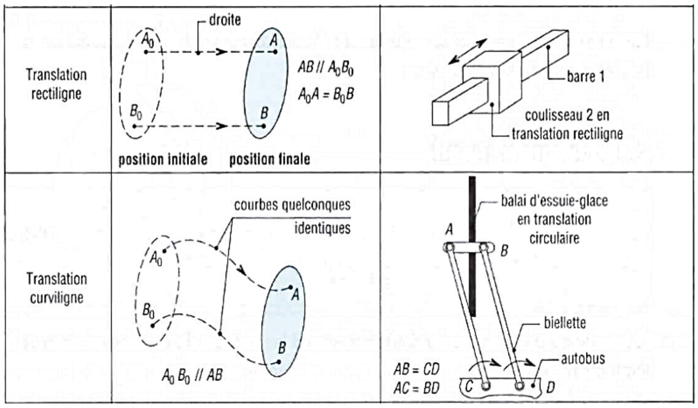
Soit un repère de référence $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ lié au solide S_0. On appelle trajectoire de M par rapport à R_0 l'ensemble des positions successives de M quand la date t varie.

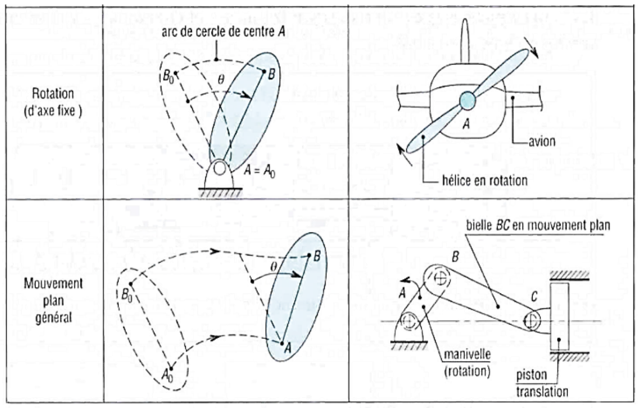


Solide de référence S_0

2.2. Mouvement plan d'un solide

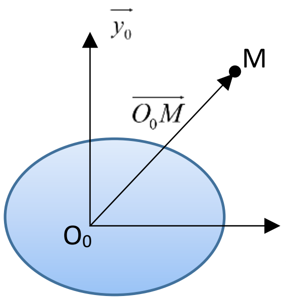
Résumé des principaux types de mouvements plans





2.3. Vecteur-position

Le vecteur-position $\overrightarrow{O_0M}$ définit la position, à l'instant t, du point M dans son mouvement par rapport au repère de référence R_0.



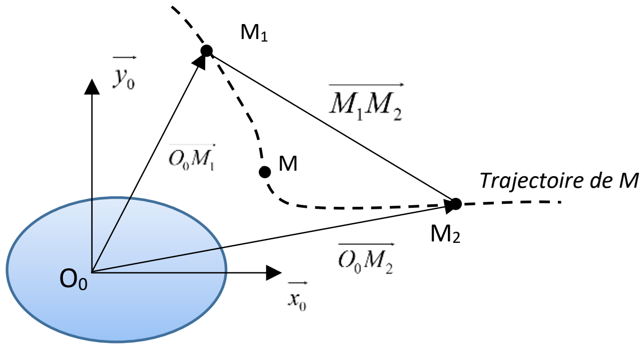
Solide de référence

2.4. Vecteur-déplacement

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1, et M_2 la position de M à t_2, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée $(t_2 - t_1)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O_0} + \overrightarrow{O_0M_2} = \overrightarrow{O_0M_2} - \overrightarrow{O_0M_1}$$

le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ *mesure la distance entre* M_1 *et* M_2

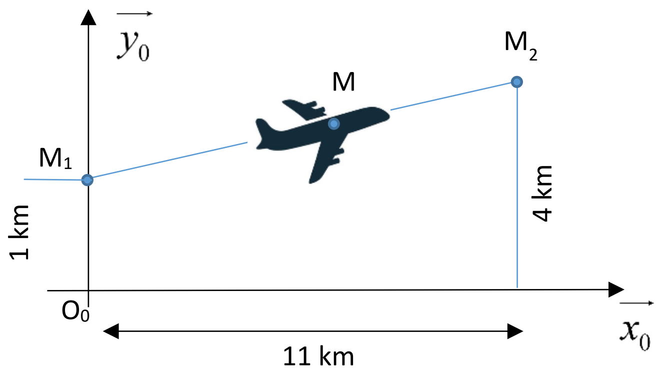


Exemple 2 : Considérons un avion en phase ascensionnelle suivant une trajectoire rectiligne, R_0 est le repère lié au sol.

a) Déterminer les vecteurs position $\overrightarrow{O_0M_1}$ et $\overrightarrow{O_0M_2}$.

b) En déduire le vecteur position $\overrightarrow{M_1M_2}$

c) En déduire la Distance entre M_1 et M_2

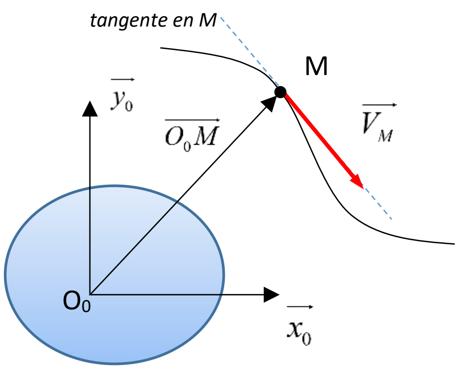


2.5. Vecteur-vitesse

Si $\overrightarrow{O_0M}$ définit le vecteur position d'un point M dans un repère R_0, on note $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$ le vecteur-vitesse de M par rapport au repère.

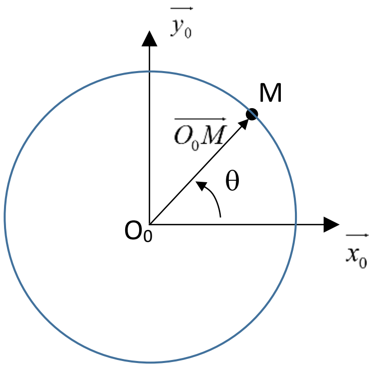
Par définition : $\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{O_0M}\right]_R$

Le vecteur vitesse est tangent en M à la trajectoire.



Nous de mentionnerons pas obligatoirement le repère afin de simplifier les écritures. Ainsi $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_{M/R_0}}$.

Exemple 3 : cas d'un mouvement de rotation



Le point M se déplace avec une vitesse circulaire uniforme autour de l'origine O_0 dans $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. On pose $R = \left\| \overrightarrow{O_0M} \right\|$ le rayon du cercle représentant la trajectoire du point M et $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = Cte$

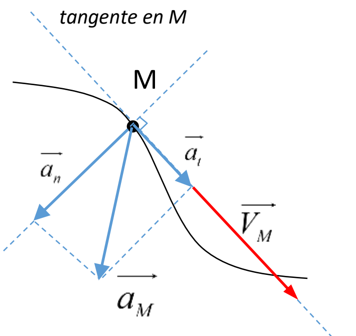
Q : Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}$, placer ce vecteur sur la figure ci-dessus.

2.6. Vecteur-accélération

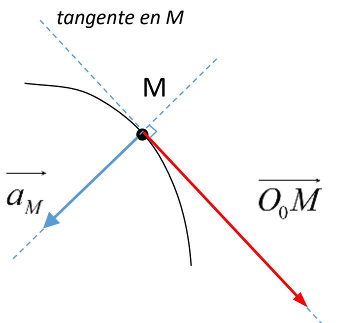
On note $\overrightarrow{a_M}$, $\overrightarrow{\gamma_M}$ ou $\overrightarrow{\Gamma_M}$ le vecteur-accélération de M par rapport à R_0.

Par définition : $\overrightarrow{a_M} = \left[\dfrac{d}{dt} \overrightarrow{V_M} \right]_{R_0} = \left[\dfrac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{O_0M} \right]_{R_0}$ $\overrightarrow{a_M}$ admet 2 composantes : $\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$

- $\overrightarrow{a_t}$: Composante de l'accélération tangentielle portée par la tangente en M. Dans le sens du vecteur-vitesse pour un mouvement accéléré, dans le sens opposé pour un mouvement décéléré, nulle pour une vitesse uniforme.
- $\overrightarrow{a_n}$: Composante de l'accélération normale, perpendiculaire à la tangente, orientée vers la partie concave de la trajectoire.



Cas d'un mvt accéléré

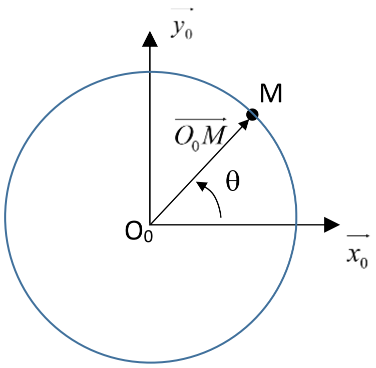


Cas d'une vitesse constante

Exemple 4 : cas d'un mouvement de rotation

On reprend toutes les caractéristiques de l'exemple 3.

Q : caractériser $\overrightarrow{a_M}$, placer son représentant sur la figure ci-contre.

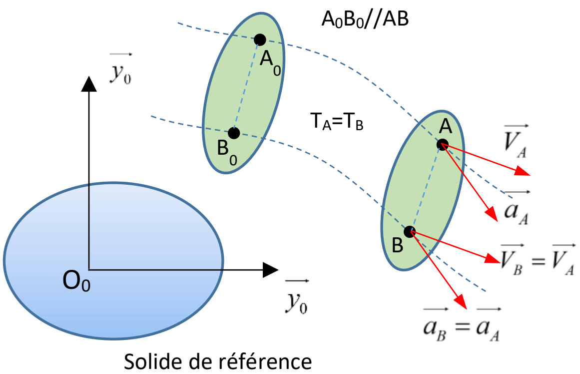


3. Mouvements élémentaires

3.1. Mouvement de translation

3.2. Propriétés

- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.
- Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération.
- De ce fait le mouvement de translation d'un solide est complétement défini par le mouvement de l'un de ses points.



3.3. Mouvements rectilignes particuliers

3.3.1. Mouvement rectiligne uniforme

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération et avec une vitesse constante

$$\boxed{\begin{aligned} &a = 0 \\ &v(t) = v_0 = \text{constante} \\ &x(t) = v_0 t + x_0 \end{aligned}}$$

x_0 : déplacement initial (à t = 0)
v_0 : vitesse initiale et vitesse de mouvement
x : déplacement à l'instant t

3.3.2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération et avec une vitesse constante

$$\boxed{\begin{aligned} &a = a_0 = \text{constante} \\ &v(t) = v_0 + at \\ &x(t) = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2} \end{aligned}}$$

Conditions initiales à t = 0 :

$x = x_0$, $v = v_0$, et $a=a_0$

Autre formule utile : $v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$

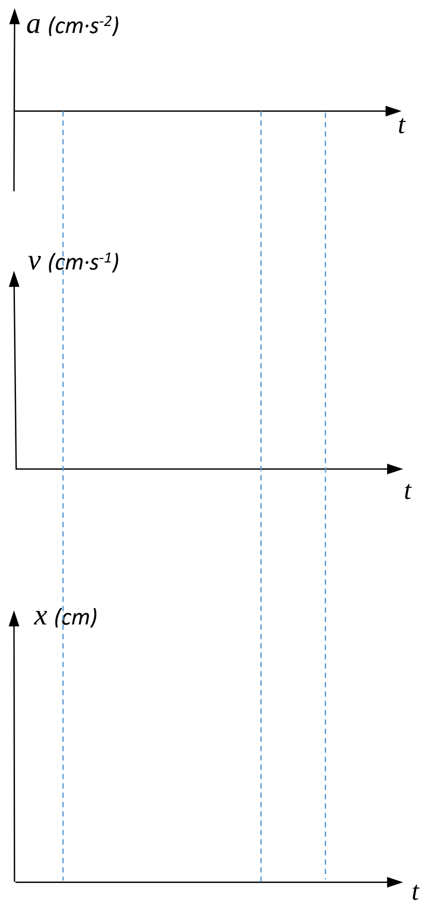
Exemple 5 : Loi de vitesse en trapèze

Physiquement il est impossible de passer d'une vitesse nulle à une vitesse non nulle. Les actionneurs des machines-outils sont souvent pilotés par une loi de vitesse dite en « trapèze ».

Au démarrage le chariot atteint la vitesse de 10 cm·s^{-1} en 2 secondes. Il évolue à la vitesse constante pendant 8 secondes et puis s'arrête sur une distance de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.

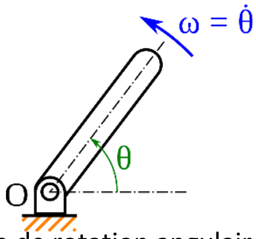
Q_1 : Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.

Q_2 : Représenter les graphes de l'accélération (a), de la vitesse (*v*) et de la distance (*x*) en fonction du temps (*t*).



3.4. Mouvement de rotation

3.4.1. Mouvement de rotation uniforme



L'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \qquad a = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$
$$\omega = \omega_0 = \text{constante}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega\, t$$

ω : vitesse de rotation angulaire en rad·s^{-1}

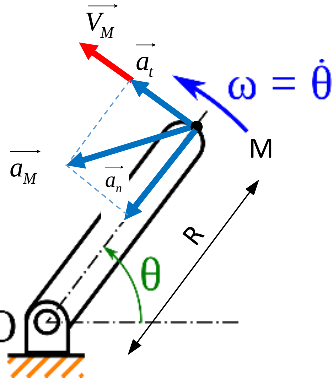
Si N est la vitesse de rotation en tours par minute $\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$

3.4.2. Mouvement uniformément accéléré

L'accélération angulaire est constante :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \qquad a = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{constante}$$
$$\omega = \alpha t + \omega_0$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Autre formule utile : $\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2a(\theta - \theta_0)$



3.4.3. Vitesse et accélération d'un point

Nous avons caractérisé ces grandeurs au chapitre 2.3 et 2.4. On doit retenir :

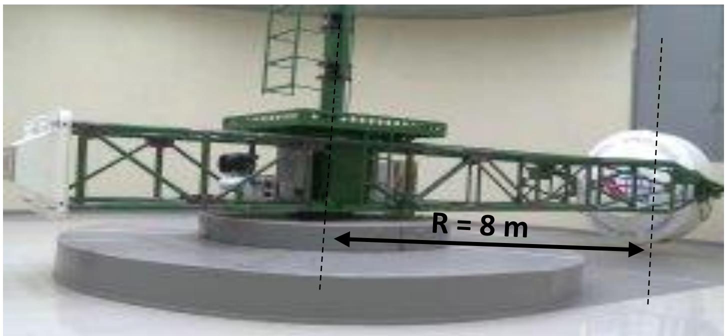
$$\left\|\vec{V_M}\right\| = V_M = R\omega \quad \text{pour la vitesse tangentielle}$$
$$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t} \quad \text{pour l'accélération avec } a_t = aR \quad \text{et} \quad a_n = \omega^2 R = \frac{V_M{}^2}{R} = \omega V_M$$

Exemple 6 : Centrifugeuse

Les pilotes de chasse doivent passer par une centrifugeuse afin de tester leur résistance à de très fortes accélérations.

Q_1 : On impose une accélération maximale de 12 g (1 g = 9,81 m·s^{-2}). En déduire la vitesse de rotation maximale ainsi que la vitesse tangentielle maximale du passager à cette valeur.

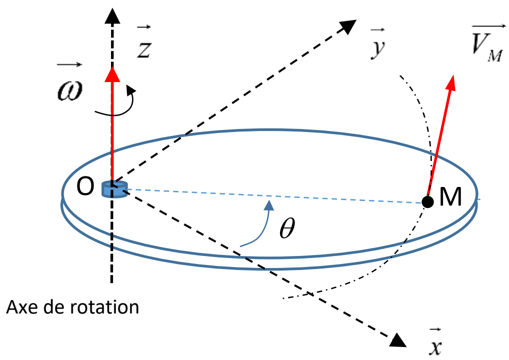
Q_2 : Le dispositif met 10 tours pour s'arrêter. Déterminer le temps mis jusqu'à l'arrêt si l'on considère que la décélération est constante.



3.4.4. Vecteur-rotation

La représentation vectorielle de la vitesse de rotation est nécessaire aux études cinématiques dans l'espace. La démarche est la même que pour celle du vecteur-moment et du moment scalaire.
L'axe de rotation $(O, \vec{z})$ est perpendiculaire au plan du mouvement de rotation $(\vec{x}, \vec{y})$. La vitesse angulaire ω est définie par le vecteur-rotation $\vec{\omega}$ porté par l'axe de rotation :

On pose : $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$



4. Orientation d'un solide dans l'espace, théorie des angles d'Euler

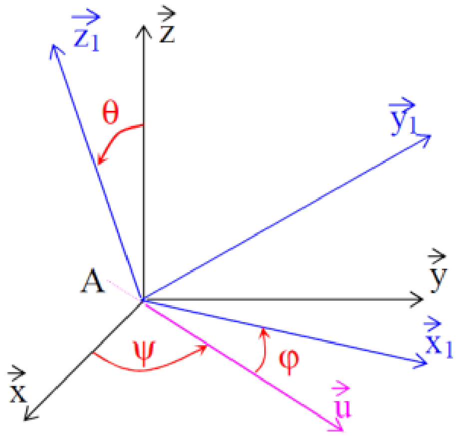
Les grandeurs décrites précédemment dépendent du repère (de la base) par rapport auquel on étudie le mouvement. Il est possible de décrire le mouvement par rapport à n'importe quel repère.

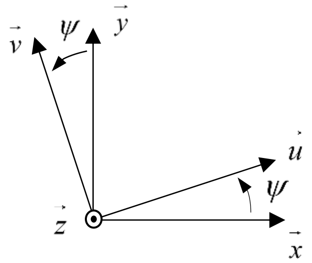
Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire, à partir de ce vecteur il est possible de définir trois rotations successives qui permettent de « ramener » la base $B_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ par rapport à la base $B(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Trois angles seulement suffisent à donner n'importe quelle orientation à la base B_1 par rapport à la base B_2.

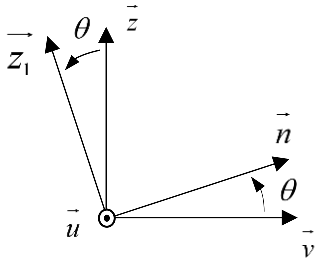
Les **angles d'Euler** correspondent à un paramétrage possible :

- angle de précession ψ permettant la rotation autour de $\vec{z}$, pour amener $\vec{x}$ sur $\vec{u}$
- angle de nutation θ permettant la rotation autour de $\vec{u}$, pour amener $\vec{z}$ sur $\overrightarrow{z_1}$
- angle de rotation propre φ permettant la rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$, pour amener $\vec{u}$ sur $\overrightarrow{x_1}$

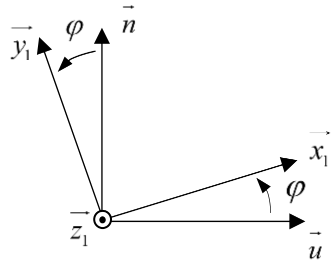




Précession



Nutation



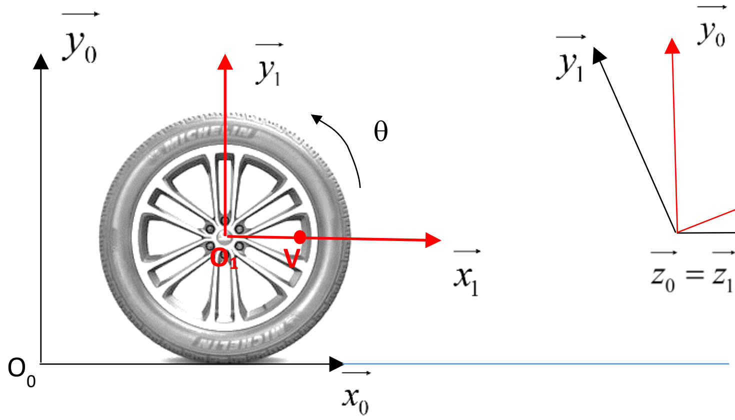
Rotation propre

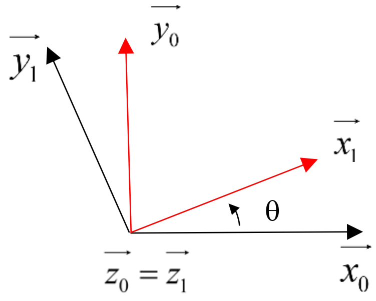
Exemple 7 : Trajectoire d'une valve de roue

Le repère $R_0(O_0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est lié au sol, $R_1(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ est lié à la roue, O_1 est l'axe de rotation de la roue de rayon R. La valve est à la distance R_v du centre de la roue.

On note θ l'angle orienté de $\overrightarrow{x_0}$ vers $\overrightarrow{x_1}$. $\theta=\omega$t est proportionnel à la vitesse angulaire de la roue. La roue se déplace à une vitesse constante $v(t)=-R\omega$.

Q : Donner l'équation paramétrique de la trajectoire dans le repère R_0





5. Torseur cinématique

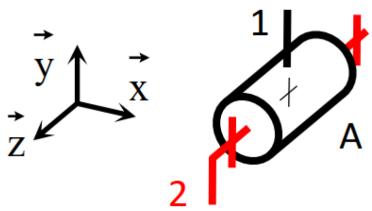
On démontre que le mouvement d'un solide dans un repère R est composé de deux éléments : la rotation et la translation. Un champ de vecteurs uniforme caractérise la vitesse globale de rotation du solide, et un champ de vecteurs, représente les vitesses linéaires des points du solide.

On note ainsi le torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au référentiel R et en un point particulier, ici au point A :

$$\{\upsilon_{1/0}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_R$$

Les torseurs cinématiques des 11 liaisons vous ont déjà été distribués sur les documents précédents.

Exemple de la liaison pivot :



$$\{\upsilon_{2/1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{2/1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \end{Bmatrix}_R$$