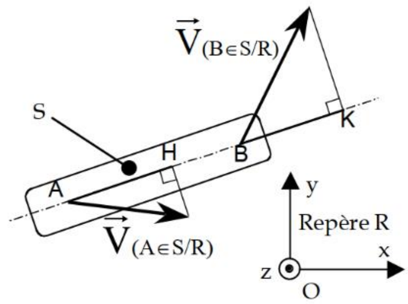
Équiprojectivité,

Centre Instantané de Rotation

1- Equiprojectivité des vecteurs vitesses

1.1. Enoncé

Soient deux points A et B appartenant à un même solide S et $\vec{V}_{(A \in S/R)}$ *et* $\vec{V}_{(B \in S/R)}$ les vecteurs vitesses des points A et B, appartenant à S, par rapport à un même référentiel R.



La projection orthogonale de $\vec{V}_{(A \in S/R)}$ sur *AB* est égale à la projection orthogonale de $\vec{V}_{(B \in S/R)}$ sur *AB*.

$$\boxed{\vec{V}_{(A \in S/R)} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}_{(B \in S/R)} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

On en déduit que AH = BK

1.2. Exploitation du théorème de l'équiprojectivité des vecteurs vitesses

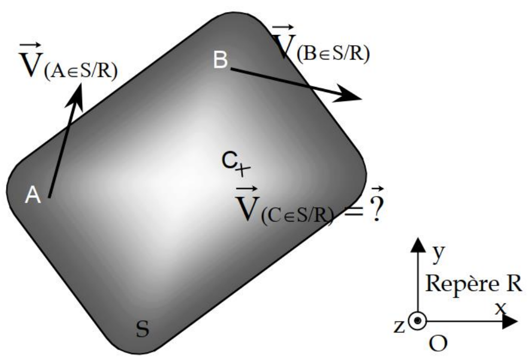
Pour pouvoir appliquer ce théorème et réaliser les différentes constructions, nous devons connaître une vitesse intégralement, et connaître, au minimum, le support du vecteur vitesse que nous souhaitons déterminer.

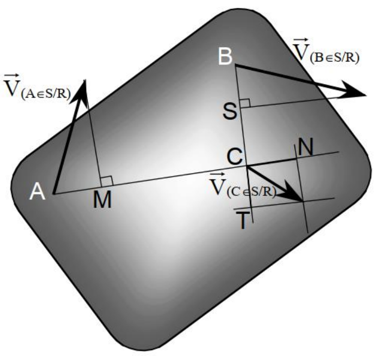
1.3. Détermination d'une vitesse par double équiprojectivité

Soient les vecteurs vitesses :

- $\vec{V}_{(A \in S/R)}$ *et* $\vec{V}_{(B \in S/R)}$ *deux vitesses connues ;*
- $\vec{V}_{(C \in S/R)}$ *une vitesse de direction, de sens et d'intensité inconnue.*

La détermination de $\vec{V}_{(C \in S/R)}$ *est possible par double équiprojectivité à partir des deux vitesses* $\vec{V}_{(A \in S/R)}$ *et* $\vec{V}_{(B \in S/R)}$ *sont intégralement connues (direction + sens + intensité)*





$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$
$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{CT}$

2. Centre instantané de rotation

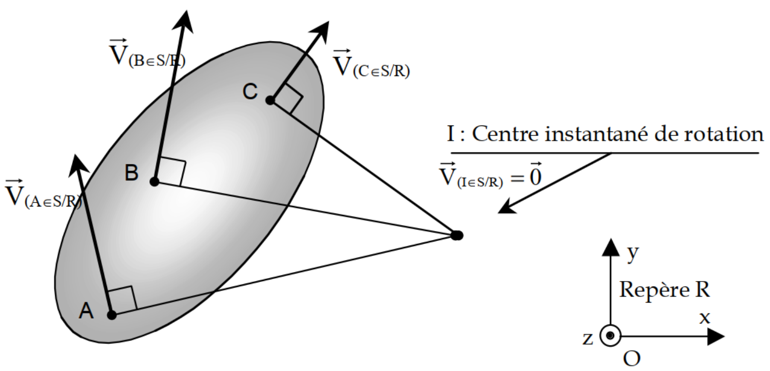
2.1. Définition

Pour tout solide S en mouvement plan par rapport à un repère R, il existe **un point I et un seul**, ayant une vitesse nulle $\vec{V}_{(I\in S/R)} = \vec{0}$ à l'instant t considéré et appelé ***centre instantané de rotation*** ou ***CIR***.

Le CIR possède les propriétés d'un centre de rotation à l'instant (t) considéré. A l'instant suivant (t'=t+Δt), il y a de fortes chances pour que le CIR ait changé de position.

2.2. Détermination et construction du CIR

En tant que centre de rotation, **le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux supports des vecteurs vitesses** du solide.



*Remarque : Lorsqu'une pièce subit un **mouvement de rotation**, le CIR se confond avec le centre de rotation.*

2.3. Détermination des vecteurs vitesses grâce au CIR

Puisque I est le Centre Instantané de Rotation, nous pouvons en déduire que :

$\|\vec{V}_{(A\in S/R)}\| = IA\ \omega_{S/R}$ *et* $\|\vec{V}_{(B\in S/R)}\| = IB\ \omega_{S/R}$

On peut en déduire que : $\boxed{\|\vec{V}_{(A\in S/R)}\| = \frac{IA}{IB} \times \|\vec{V}_{(B\in S/R)}\|}$

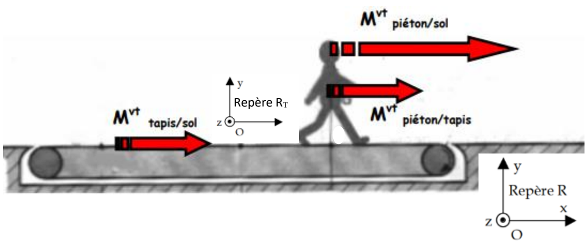
Grâce à cette relation, nous sommes capable de déterminer la norme d'une des vitesses inconnues.

3. Composition des vecteurs vitesses

Soit un solide en mouvement plan par rapport à deux repères R_T et R. Le vecteur vitesse du point $M_{\in S/R}$ est égale à la somme du vecteur vitesse de $M_{\in S/RT}$ et du vecteur vitesse de $M_{\in RT/R}$.

$$\boxed{\vec{V}_{M\in S/R} = \vec{V}_{M\in S/R_T} + \vec{V}_{M\in R_T/R}}$$

Exemple d'un tapis roulant :



Il y a composition de mouvement :

$$\boxed{M^{vt}{}_{\text{piéton/sol}} = M^{vt}{}_{piéton/tapis} + M^{vt}{}_{tapis/sol}}$$

La vitesse du piéton par rapport au sol est la composée des deux autres :

$$\boxed{\vec{V}_{\text{piéton/sol}} = \vec{V}_{piéton/tapis} + \vec{V}_{tapis/sol}}$$

Remarque : *Cette relation est générale et peut être étendue aux vecteurs de vitesses angulaires. Elle reste valable même si les vecteurs vitesses ne sont pas colinéaires.*

APPLICATION :

Soit une échelle appuyée en A sur un mur et en contact avec le sol en B. Elle glisse en A vers le bas à la vitesse de **0,5 m·s**$^{-1}$.
Déterminer graphiquement puis algébriquement grâce aux propriétés d'équiprojectivité et du CIR la vitesse en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol (de direction *x*). On pose AB =3 m, un angle de 60° existe entre le sol et l'échelle.