# Lois Physiques

## Chapitre 6
## Les nombres complexes

G. MALEJACQ

# LES NOMBRES COMPLEXES

Dans l'étude des circuits électriques, le passage du courant continu en courant alternatif sinusoïdal nécessite l'introduction des nombres complexes. Dès lors que l'on impose au circuit de travailler à une fréquence unique, l'emploi de relations linéaires appliquées dans les cas du courant continu reste valable grâce à la notion d'impédance complexe et ce quels que soient les dipôles mis en œuvre. L'ultilisation des nombres complexes facilite ainsi la mise en équations et permet une recherche simplifiée des grandeurs électriques ( tension, courant, déphasage …)

## I- FORME CARTESIENNE D'UN COMPLEXE - OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$

### 1-Addition-multiplication

Un nombre complexe s'écrit sous la forme cartésienne ( ou algébrique ) :

$$\boxed{z = a + jb}$$

(a , b) étant un couple de réels

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.
L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ se font alors de façon "automatique", comme avec les réels, j se comportant comme un "paramètre". On écrira $\boxed{j^2 = -1}$ et chaque fois que $j^2$ est rencontré dans les calculs, il est remplacé par (-1).

Toutes les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ s'appliquent.

Ainsi:
$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2) \qquad [\textit{addition dans } \mathbb{C}]$$
$$(a_1 + jb_1)\, x\, (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j\,(a_1b_2 + a_2b_1) \qquad [\textit{multiplication dans } \mathbb{C}]$$

Exemples:

$$(1+3j)+(5-7j) = 6-4j$$
$$(-2+5j)(3-4j) = 14+23j$$

Remarque:
$j^0 = 1$ ; $j^1 = j$ ; $j^2 = -1$ ; $j^3 = -j; j^4 = 1$ ; $j^5 = j$ ; $j^6 = -1$ ; $j^7 = -j$ (séquence 1 ; j ; -1 ; - j )

Conventions:

Si b = 0 , on note *z = a* *z est réel*
Si a = 0 , on note *z = j.b* *z est un imaginaire **pur***

Alors si $z = a + jb$, $a$ s'appelle **la partie réelle** de $z$ et $b$ **sa partie imaginaire**.
On note aussi : $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

**2-Nombre complexe conjugué.**

a) Définition.

Le conjugué de $z = a+jb$ est $\overline{z} = a - jb$

b) Inverse d'un complexe non nul.

$Si\ \ z = a + jb$ On note $\overline{z} = a - jb$ le conjugué de z et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module

Alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ :

$$z\overline{z} = |z|^2 \text{ et pour z non nul : } z\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = 1$$

$$\frac{\overline{z}}{|z|^2} \text{ se note } \frac{1}{z} \text{ et s'appelle l'inverse de z.}$$

Règle: Inverser un complexe revient à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué.

Ex: $\dfrac{1}{3-4j} = \dfrac{3+4j}{25} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}j$

c) Quotient de deux complexes

Si $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, on pose $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

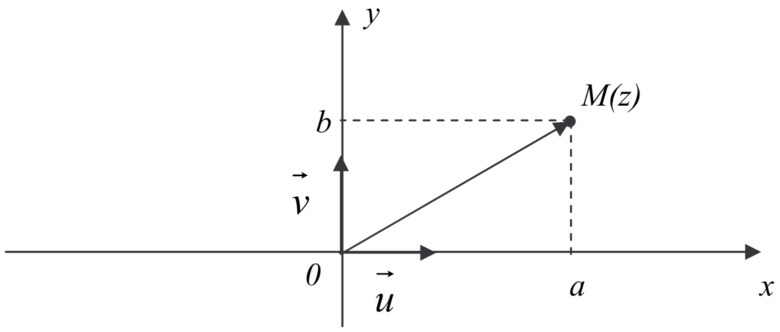
ex : $\dfrac{1-2j}{1-3j} = \dfrac{(1-2j)(1+3j)}{10} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{10}j$

## II-INTERPRETATION GEOMETRIQUE, FORME TRIGONOMETRIQUE

### 1- Interprétation géométrique.

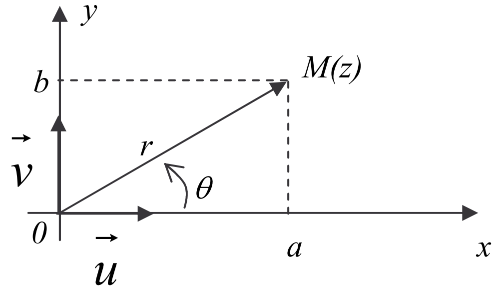
Soit le plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout nombre complexe z=a+jb on associe le point M ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées a et b. On dit que :

M est l'image du nombre complexe.
Z=a+jb est l'affixe du point M(a,b)



## 2-Module et argument d'un nombre complexe.

Soit M d'affixe ***z =a + jb***




a) Module
Le module de z est la distance *r=OM*. On le note $|z| = r = OM$

b) Argument
L'argument de z est la mesure en radians de l'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{OM}$ . On le note :

$$\text{Arg } z = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ modulo } 2\pi$$

$$\text{Ou Arg } z = \theta + k\,2\pi$$

θ est parfaitement défini par $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{d'où} \quad \theta = Arc\tan\frac{b}{a}}$

## 3- Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

En reprenant la figure précédente on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\vec{u} + r\sin\theta\vec{v}$$

z peut se mettre sous la forme trigonométrique : $\boxed{z = r\,(\cos\theta + j\sin\theta)}$

On peut écrire aussi : $\boxed{z=[r, \theta]}$

## 4- Forme exponentielle d'un nombre complexe.

Vis à vis de la multiplication et de la division, les complexes du type [1,θ] se comportent donc comme les réels du type $e^{\theta}$. D'où l'idée de poser, de façon *purement formelle* et sans support théorique la notation *exponentielle complexe* de module *r* :

$$\boxed{re^{j\theta} = [r,\theta] = r(\cos\theta + j\sin\theta)}$$

Conséquence pour le cas particulier où *r* = 1 :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta$$

D'où, par somme et différence, les formules d'EULER :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{aligned}}$$

Application: Linéarisation des fonctions trigonométriques.

Ex : Linéarisation de $f(\theta) = \sin^3\theta$

On a $f(\theta) = (\frac{1}{2j})^3(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^3 = (\frac{1}{2j})^3(e^{3j\theta} - 3e^{2j\theta}e^{-j\theta} + 3e^{j\theta}e^{-2j\theta} - e^{-3j\theta})$

$= -\frac{1}{8j}(2j\sin(3\theta) - 6j\sin\theta)$ d'où $f(\theta) = \frac{-1}{4}[\sin(3\theta) - 3\sin\theta]$

Il deviendra simple d'intégrer cette fonction (ce calcul est prévue au chapitre 14).

## 5-Formule de Moivre.

Sachant que $[\rho_1, \theta_1][\rho_2, \theta_2] = [\rho_1.\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$ d'où :

pour $\rho \neq 0$, $\frac{1}{[\rho, \theta]} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$

pour $\rho_1 \neq 0$, $\frac{[\rho_1, \theta_1]}{[\rho_2, \theta_2]} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$

Il s'ensuit les théorèmes suivants :

Théorèmes :
Le module d'un produit est égal au produit des modules.
L'argument d'un module est égal à la somme des arguments.

Le module d'un quotient est égal au quotient des modules.
L'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments.

En généralisant, on obtient alors la formule de MOIVRE, à savoir :

$$\boxed{\forall n \in Z, \forall \theta \in R, (\cos\theta + j.\sin\theta)^n = \cos(n.\theta) + j.\sin(n.\theta)}$$

Application: Exprimer simultanément $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple: n = 3

$(\cos\theta + j\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + j\sin(3\theta) = \cos^3\theta + 3j\cos^2\theta\sin\theta + 3j\cos\theta\sin^2\theta + j\sin^3\theta$

*d'où*

$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

## III-TRAITEMENT COMPLEXE DES FONCTIONS SINUSOIDALES

### 1-Fonctions sinusoïdales et fonctions complexes associées

a) Définitions

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$ , $f(t) = A.\cos(\omega.t + \varphi)$ avec $A \in \mathbb{R}^{*+}$, $\omega \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

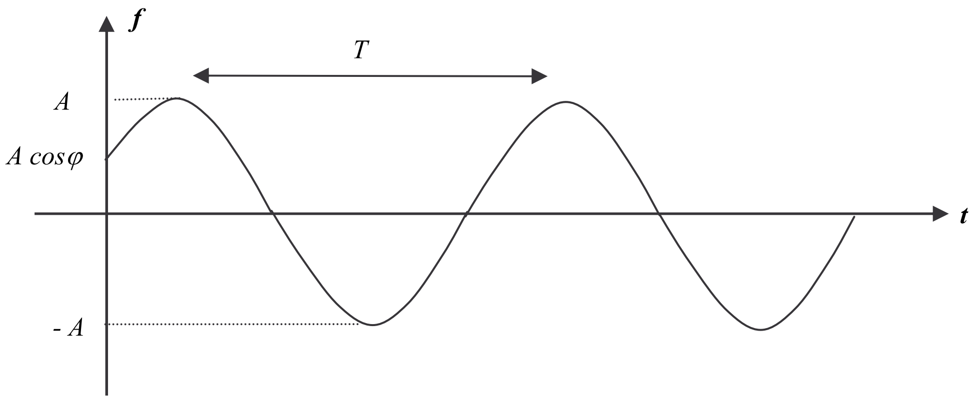
A : amplitude maximale de f (la valeur efficace est $\dfrac{A}{\sqrt{2}}$ )

$\omega t + \varphi$ : phase de la fonction

$\varphi$ : phase à l'origine

$\omega$ : pulsation (en radian par seconde : $rad.s^{-1}$)

f: fonction sinusoïdale de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$




On pose alors : $\forall t \in \mathbb{R}$ , $\underline{f}(t) = A[\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)] = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$

$\underline{f}$ est la **FONCTION COMPLEXE ASSOCIE** à f

b) Propriétés

**- *Somme de deux fonctions sinusoïdales de MEME PULSATION.***

Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$ , $f_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $f_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

Soit $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Alors $f(t) = A_3\cos\omega t - A_4\sin\omega t$ avec $A_3 = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$

$$A_4 = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$

$A_3$ et $A_4$ étant des constantes, il est possible par identification de retrouver la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ . On démontre ainsi que *f* est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega$ et que $\underline{f} = \underline{f_1} + \underline{f_2}$

Théorème: La somme de fonctions sinusoïdales de MEME PULSATION $\boldsymbol{\omega}$ est aussi sinusoïdale de pulsation $\boldsymbol{\omega}$ et la fonction complexe associée à cette somme est la somme des fonctions complexes associées.

### - ***Dérivation-intégration***

De façon évidente, la fonction dérivée et la primitive "à constante nulle" d'une fonction sinusoïdale de pulsation $\boldsymbol{\omega}$ sont sinusoïdales de pulsation $\boldsymbol{\omega}$. On se propose de déterminer leurs fonctions complexes associées.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$ , $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $\underline{f}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$

la dérivée est définie par :

$$\underline{f}'(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

d'où $\underline{f}'(t) = \omega Ae^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)} = j\omega Ae^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)\underline{f}'(t)$ (puisque $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$)

La primitive "à constante nulle" , F de f est définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \int f(t)dt = (\frac{A}{\omega})\sin(\omega t + \varphi) = (\frac{A}{\omega})\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

d'où $\underline{F}(t) = (\frac{A}{\omega})e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} = (\frac{A}{j\omega})\underline{f}(t)$ (puisque $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}$)

Théorème :
On obtient l'amplitude complexe de la dérivée d'un signal sinusoïdal en multipliant l'amplitude complexe par jω.

$$\boxed{\text{Si } x(t) \leftrightarrow \underline{X} \quad \text{alors } \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega\underline{X}}$$

On obtient l'amplitude complexe de la primitive d'un signal sinusoïdal en divisant l'amplitude complexe par jω.

$$\boxed{\text{Si } x(t) \leftrightarrow \underline{X} \quad \text{alors } \int x(t)\,dt \leftrightarrow \frac{\underline{X}}{j\omega}}$$

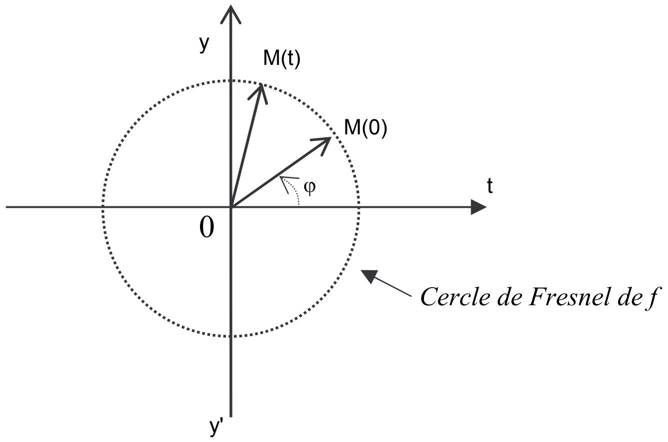
## 2-Diagramme de Fresnel d'une fonction sinusoïdale

a) Définition

$\forall t \in \mathbb{R}$ , $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $\underline{f}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$

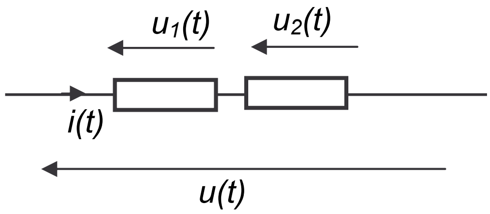
On note M(t) l'image de $\underline{f}$(t) dans le plan complexe.
Quand t varie, ce point décrit le cercle de centre o et de rayon A, et ce à la vitesse angulaire de ω radians par seconde (mouvement circulaire uniforme).
Caractéristique f par son diagramme de Fresnel consiste à donner M(t) pour une certaine valeur arbitraire de t (en général t=0).

La distance OM(0) donne l'amplitude et $\varphi$ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{i}, \vec{OM}(0))$.

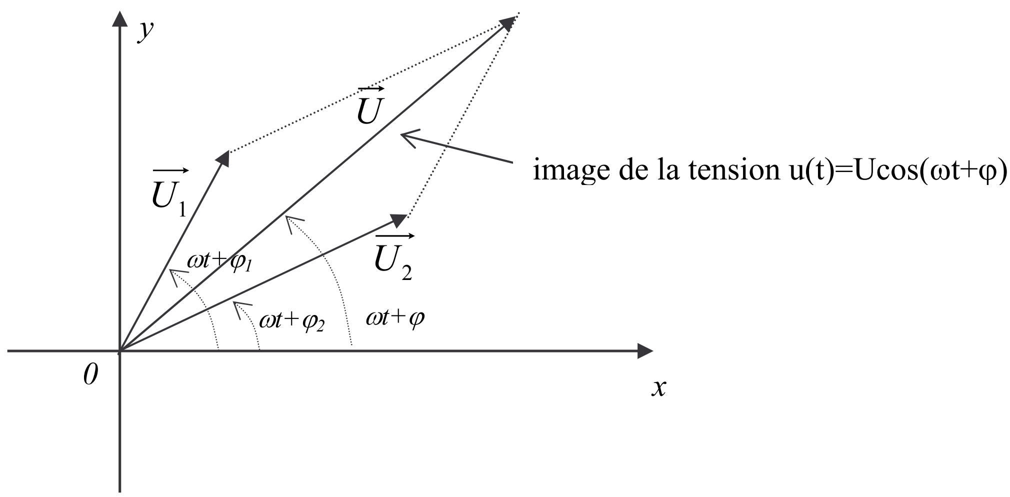



b) Diagramme de Fresnel d'une somme de fonctions sinusoïdales

Considérons deux tensions à additionner dans une maille simple :

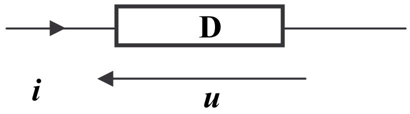



Pour $u_1(t)= U_1 \cos(\omega t+\varphi_1)$ et $u_2(t)= U_2 \cos(\omega t+\varphi_2)$ nous allons considérer les vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ dans un plan cartésien. On construit le vecteur correspondant à leur somme vectorielle. L'amplitude et la phase du signal recherché sont égales à la norme à la phase du vecteur construit.



## IV-IMPEDANCES DES DIPOLES.

### 1.1 Impédance et admittance d'un dipôle.




i et u sinusoïdaux !

Aux grandeurs **i et u on associe désormais les complexes $\underline{I}$ et $\underline{U}$**. Nous prendrons l'habitude de **souligner le symbole majuscule d'une grandeur complexe** pour le différencier notamment de la grandeur efficace.

a) Impédance

On appelle impédance complexe du dipôle la grandeur : $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}}$

$|\,\underline{Z}\,|$ est appelé l'impédance du dipôle (en $\Omega$ )

Arg ($\underline{Z}$) est le déphasage existant entre u et i : Arg ($\underline{Z}$ ) = $\varphi_{u/i}$

L'écriture algébrique de $\underline{Z}$ est $\boxed{\underline{Z} = R + j\,X}$

Avec R : résistance du dipôle ($\Omega$ )
X : réactance du dipôle ($\Omega$ )

b) Admittance

On appelle admittance du dipôle la grandeur $\boxed{\underline{Y} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j\,B}$

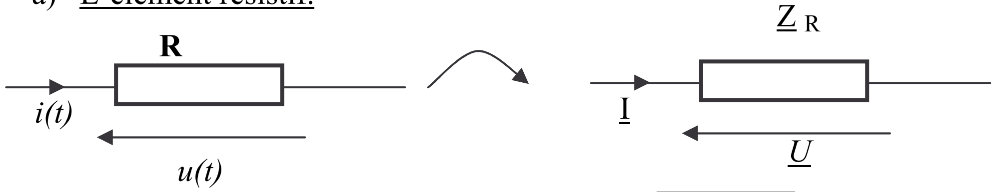
Avec G : conductance du dipôle (S : Siemens )
B : Susceptance du dipôle (S )

Arg ($\underline{Y}$) est le déphasage existant entre i et u : Arg ($\underline{Y}$ ) = $\varphi_{i/u}$

### 1.2 Cas des dipôles fondamentaux.

D'après les propriétés des fonctions complexes vues en mathématiques, on peut exprimer les impédances Z des éléments usuels.

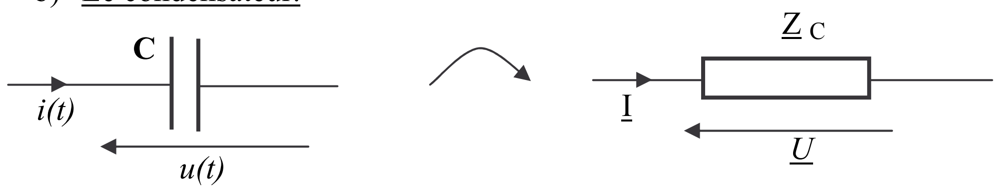
a) L'élément résistif.




D'après u(t) = R . i(t) on en déduit $\underline{V} = R\,.\,\underline{I}$ d'où $\boxed{\underline{Z}_R = R}$

$\underline{Z}_R$ est un réel pur, son argument sera toujours nul. En effet i(t) et u(t) sont toujours en phase dans un élément résistif.

b) <u>Le condensateur.</u>




Avec la relation $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$ on en déduit $\underline{I} = C\, j\omega .\, \underline{U}$ d'où $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}}$

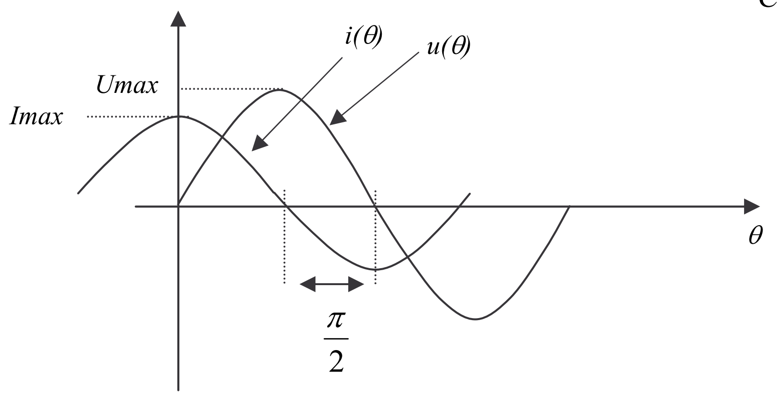
*On appelle $\omega$ la vitesse angulaire ou encore la pulsation du signal :* $\omega = 2.\pi.f$

*f : fréquence en Hz*

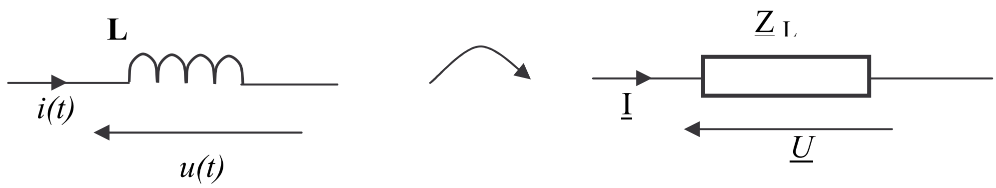
*$\omega$ : rad.$s^{-1}$*

L'argument de $\underline{Z}_C$ est donné par Arg($\underline{Z}_C$) = Arctan $\dfrac{-\frac{j}{C\omega}}{0} = -\dfrac{\pi}{2}$. Nous vérifions ainsi que u(t) est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à i(t).

$$U_{\max} = \left|\underline{Z}_C\right|.I_{\max} = \frac{1}{C\omega}.I_{\max}$$



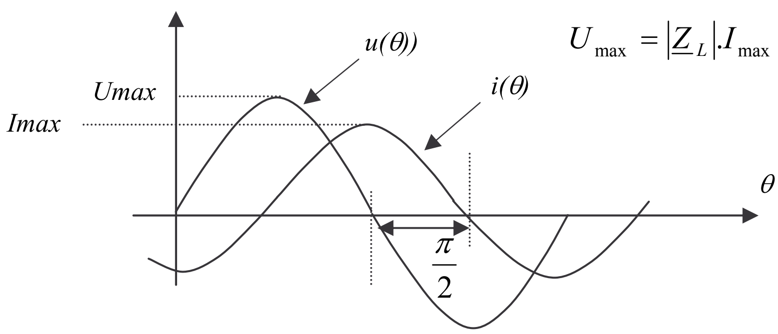

c) <u>La self inductance.</u>




Avec la relation $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ on en déduit $\underline{U} = L.\, j\omega .\, \underline{I}$ d'où $\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$

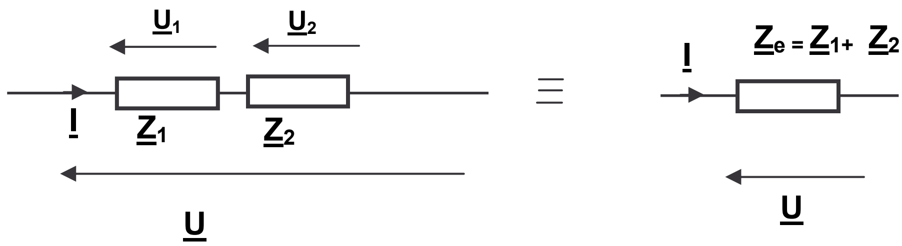
$|\,\underline{Z}_L\,| = L\omega$ et Arg ($\underline{Z}_L$) = $\dfrac{\pi}{2}$, u(t) est donc en avance sur i(t) de $\dfrac{\pi}{2}$

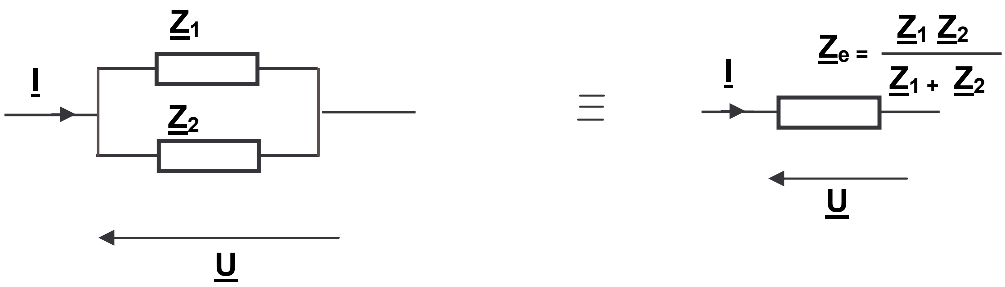
$$U_{\max} = \left|\underline{Z}_L\right|.I_{\max} = L\omega .I_{\max}$$



## 1.3 Associations d'impédances.

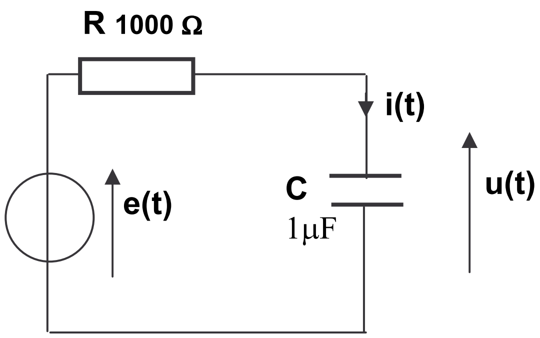
Les impédances en série où en parallèle s'associent avec les mêmes règles que les résistances. Les impédances s'ajoutent donc en série ainsi que  les admittances en parallèle.
Dans le montage ci-dessous $\underline{Z}_e$ est donc égale à $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$.
Attention aux erreurs mathématiques du genre $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| \neq |\underline{Z}_1| + |\underline{Z}_2|$ !




## 1.4 Exemple d'étude.

Dans ce montage on pose $e(t)=E_{max} \sin(\omega t)$  avec $E_{max} = 10$ V  et   $\omega = 2\pi f = 1000$ rad/s *(f=160 Hz)*
On se propose d'identifier la tension u(t).



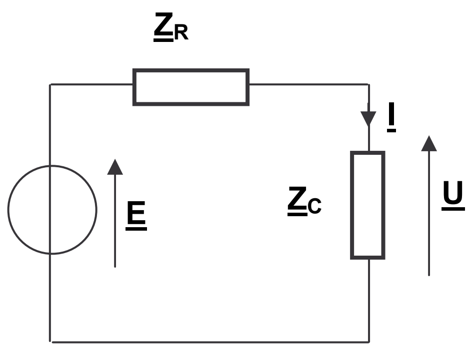

à e(t) on associe $\underline{E} = E_{max} = 10$V

u(t) → $\underline{U}$

i(t) → $\underline{I}$                    Le montage devient donc

R → $\underline{Z}_R = R = 1000\Omega$

C → $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{1}{j10^{-3}} = -j1000$



La loi des mailles donne $\underline{E} = \underline{Z}_R\,\underline{I} + \underline{Z}_C\,\underline{I}$ d'où il vient $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$ comme $\underline{U} = \underline{Z}_C\,\underline{I}$

on pose $\underline{U} = \dfrac{\underline{Z}_C\underline{E}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \dfrac{\underline{E}}{1+jRC\omega} = \underline{E}\left(\dfrac{1-jRC\omega}{1+(RC\omega)^2}\right) = \underline{E}\left(\dfrac{1}{1+(RC\omega)^2} - j\dfrac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\right)$

Si nous nous intéressons à l'amplitude maximale de la tension u(t) il suffit d'exprimer $|\underline{U}|$

$|\underline{U}| = |\underline{E}|\sqrt{\left(\dfrac{1}{1+(RC\omega)^2}\right)^2 + \left(\dfrac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}\right)^2}$ l'application numérique donne $|\underline{U}| = 10\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}07$ V

Les calculs peuvent s'avérer plus simple si l'on s'intéresse uniquement au module et à la phase. Sachant que le module d'un quotient est égal au quotient des modules, il vient plus rapidement :

$$|\underline{U}| = \frac{|\underline{E}|}{|1+jRC\omega|} = \frac{|\underline{E}|}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07 \text{ V}$$

la tension maximale en sortie du montage est donc de 7,07 V. Pour connaître le déphasage entre u(t) et e(t) on s'intéresse à Arg($\underline{U}$).

$$\varphi = Arg(\underline{U}) = Arg\left(\frac{\underline{E}}{1+jRC\omega}\right) = Arg(\underline{E}) - Arg(1+jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega) = -\frac{\pi}{4}$$

On peut en déduire maintenant la fonction temporelle de u(t) : $\boxed{u(t) = 7{,}07\sin(\omega t - \frac{\pi}{4})}$