Lois Physiques

Chapitre 4
Résolution d'un système d'équations

G. MALEJACQ

SYSTEMES D'EQUATIONS

Résolution d'un système d'équation linéaire du 1er degré.

Nous allons être amené à "éditer" à partir de schéma pourtant simple une grande quantité d'équations. Dans nos réseaux, un système d'équations linéaires du premier degré à plusieurs inconnues permettra le calcul des grandeurs physiques.

De méthodes plus moins efficaces facilitent ces recherches de solutions. Je vous propose d'en découvrir quelques unes mais nous reviendrons dans l'unité de valeur PHR002 sur des méthodes plus générales lorsqu'il vous sera présenté un chapitre sur le "**CALCUL MATRICIEL**".

A- Résolution du système par substitution des variables

Pour résoudre un système d'équations suivant cette méthode, on "isole" une des inconnues, puis on l'"injecte" dans l'autre équation. Voyons un exemple :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 2\,i_1 + i_2 = 5 \\ 8\,i_1 - 2\,i_2 = 2 \end{cases}$$

En isolant i_2 dans l'équation (1) il vient : $i_2=5-2i_1$. On injecte cette variable dans l'équation (2), ce qui donne : $8\,i_1 - 2(5-2\,i_1)=2$, soit $12\,i_1=12$

On en conclu que $i_1=1$ et comme $i_2=5-2\,i_1$ alors $i_2 = 3$

Le couple solution est donc $(i_1=1\ ;\ i_2=3)$

B- Résolution par la méthode du pivot de Gauss

En utilisant le coefficient d'une inconnue dans une première équation (c'est le pivot), on tente de faire disparaître cette inconnue dans les autres équations. On recommencera le processus jusqu'à ce que la dernière équation présente une seule inconnue. Cette méthode de résolution est facilement généralisable au cas de *n* équations à *n* inconnues.

Prenons un exemple :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} 3i_1 + 2i_2 + 4i_3 - 3 = 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 - 2 = 0 \\ 2i_1 + i_2 + 2i_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Divisons l'équation (1) par la valeur du coefficient de i_1 . 3 est donc le pivot de cette première ligne.

Et le système devient

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} i_1 + \dfrac{2}{3}i_2 + \dfrac{4}{3}i_3 - 1 = 0 \\ i_1 + i_2 - i_3 - 2 = 0 \\ 2i_1 + i_2 + 2i_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

L'objectif est maintenant d'éliminer i_1 dans les dernières équations. Nous opérons pour ce faire des combinaisons de lignes en "soustrayant la ligne 1 à la ligne 2" puis "la ligne 3 à 2 fois la ligne 1".
Notons que le système reste équivalent !

$$\begin{matrix}(1)\\(2)-(1)\\(3)-2(1)\end{matrix}\begin{cases}i_1+\frac{2}{3}i_2+\frac{4}{3}i_3-1=0\\ \frac{1}{3}i_2-\frac{7}{3}i_3-1=0\\ -\frac{1}{3}i_2-\frac{2}{3}i_3+1=0\end{cases}$$

Utilisons sur la ligne (2) un nouveau pivot dans le but d'éliminer $\boldsymbol{i_2}$. Ce pivot est donc la valeur 1/3.

$$\begin{matrix}(1)\\(2)'\\(3)'\end{matrix}\begin{cases}i_1+\frac{2}{3}i_2+\frac{4}{3}i_3-1=0\\ i_2-7i_3-3=0\\ -\frac{1}{3}i_2-\frac{2}{3}i_3+1=0\end{cases}$$

En combinant les lignes nous obtenons →

$$\begin{matrix}\\ \\(3)'+\frac{1}{3}(2)'\end{matrix}\begin{cases}i_1+\frac{2}{3}i_2+\frac{4}{3}i_3-1=0\\ i_2-7i_3-3=0\\ 3i_3=0\end{cases}$$

La troisième ligne montre directement que $\boldsymbol{i_3}$=0. Le calcul de proche en proche des autres inconnues donnera i_1= -1 et $\boldsymbol{i_2}$=3.

C- Résolution par la méthode des déterminants (ou méthode de Cramer)

Considérons un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases}\mathrm{a}\,i_1+\mathrm{b}i_2=\mathrm{c}\\ \mathrm{a'}\,i_1-\mathrm{b'}\,i_2=\mathrm{c'}\end{cases}$

Expression des différents déterminant :

- Le déterminant principale est la valeur notée $\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{a}&\mathrm{b}\\ \mathrm{a'}&\mathrm{b'}\end{vmatrix}=\mathrm{ab'}-\mathrm{a'b}$

Pour calculer le déterminant relatif à i_1 ou i_2 on remplace la colonne relative à i_1 ou i_2 par celle du second membre. Ainsi :

- Le déterminant relatif à i_1 est la valeur notée $\Delta_{i_1}=\begin{vmatrix}\mathrm{c}&\mathrm{b}\\ \mathrm{c'}&\mathrm{b'}\end{vmatrix}=\mathrm{cb'}-\mathrm{c'b}$

- Le déterminant relatif à i_2 est la valeur notée $\Delta_{i_2}=\begin{vmatrix}\mathrm{a}&\mathrm{c}\\ \mathrm{a'}&\mathrm{c'}\end{vmatrix}=\mathrm{ac'}-\mathrm{a'c}$

Résolution du système :

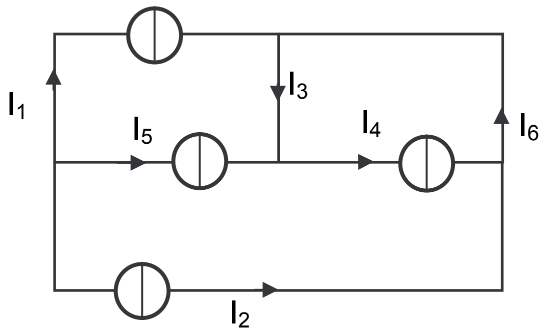
La résolution du système donne pour Δ≠0 : $\boxed{i_1=\frac{\Delta_{i_1}}{\Delta}=\frac{\mathrm{cb'}-\mathrm{c'b}}{\mathrm{ab'}-\mathrm{a'b}}\ \text{ et } i_2=\frac{\Delta_{i_2}}{\Delta}=\frac{\mathrm{ac'}-\mathrm{a'c}}{\mathrm{ab'}-\mathrm{a'b}}}$

On vérifie ces expressions en prenant les valeurs des coefficients du premier exemple :

Ainsi pour a=2, b=1, c=5, a'=8, b'=-2, c'=2 l'on a Δ= -12 ; Δ_{i1} = -12 ; Δ_{i2} = -36

Il s'ensuit que i_1=1 et i_2=3

Exercice 1



- Donner un système d'équations modélisant la circulation des courants.

- En utilisant la méthode de substitution, calculer I_4, I_5 et I_6 sachant que
I_1 = 2 A, I_2 = 0,5 A et I_3 = 1 A.

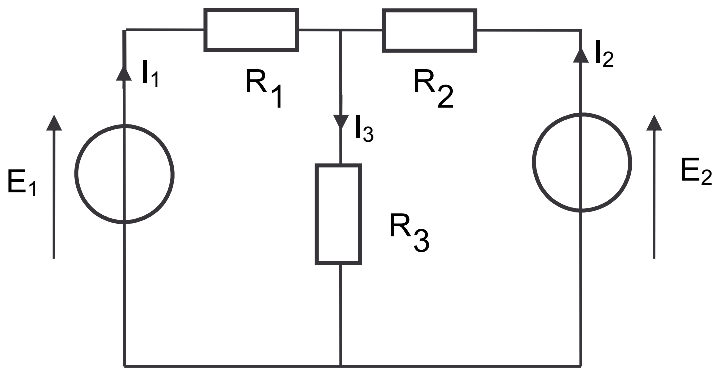
Exercice 2

a) Dans le circuit ci-dessous, i_1,i_2,i_3 étant les inconnues, montrer que les lois élémentaires de l'électrocinétique peuvent donner le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ \mathrm{R}_1\, i_1 + \mathrm{R}_3\, i_3 - \mathrm{E}_1 = 0 \\ \mathrm{R}_2\, i_2 + \mathrm{R}_3\, i_3 - \mathrm{E}_2 = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre ce système par la méthode du pivot de Gauss.

E_1 = 10 V E_2 = 5 V R_1 = 56 kΩ R_2 = 12 kΩ R_3 = 22 kΩ



Exercice 3

Dans le système ci-dessous donner les expressions des grandeurs $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i_1, i_2, R_1, R_2 , L_1, L_2 et k. Vous utiliserez la méthode des déterminants.

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + k\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = V - R_1 i_1 \\ k\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -R_2 i_2 \end{cases}$$