Lois Physiques

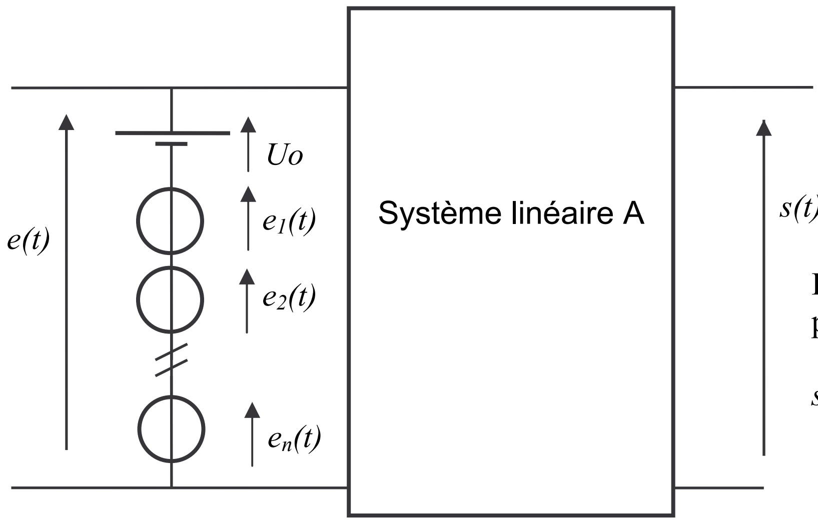
Chapitre 8
Séries de Fourier

G. MALEJACQ

I- Généralités sur les séries de Fourier

1.1- Intérêts en électricité

L'étude d'un circuit polarisé sous un régime sinusoïdal permanent est facilitée grâce à la notion d'impédance développée avec les nombres complexes. Une telle aisance de calcul va pouvoir se généraliser à tout type de signaux périodiques puisque des théorèmes mathématiques montrent qu'il est possible de décomposer toutes fonctions périodiques en une somme de fonctions sinusoïdales de différentes fréquences.



Le théorème de superposition permet aussi d'écrire:

$s(t)=A.U_o+A.e_1(t)+......+A.e_n(t)$

On admet facilement que $e(t)=U_o+e_1(t)+ e_2(t)+......+e_n(t)$

où U_0 *est une tension continue représentant la valeur moyenne de e(t.)*
Les fonctions $e_n(t)$ *sont les fonctions représentant les composantes sinusoïdales de e(t).*

1.2- Définition

Considérons une fonction périodique *e(t)* de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ il est possible d'écrire une telle fonction sous la forme suivante :

$$e(t) = \underbrace{a_0}_{\substack{valeur\\moyenne}} + \underbrace{(a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t)}_{fondamental} + \underbrace{(a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t)}_{\substack{premiere\ harmonique\\ou\ harmonique\ 2}} + \underbrace{(a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t)}_{\substack{seconde\ harmonique\\ou\ harmonique\ 3}} + \cdots$$

Cette écriture de la fonction *e(t)* est appelée le ***<u>développement en série de Fourier de e(t).</u>***

En fait on cherchera à écrire *e(t)* sous la forme $e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

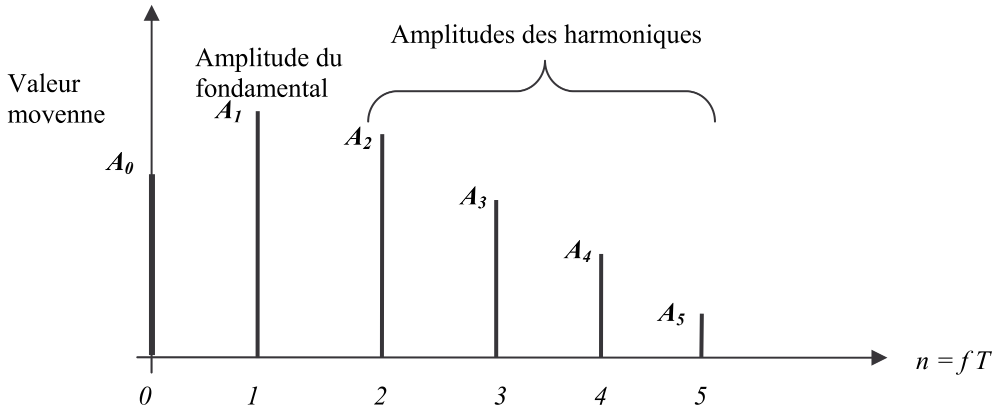
Une autre écriture possible d'une série de Fourier est :

$$s(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$

avec $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$ (cf. trigo : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x+\varphi)$)

1.3 – Spectre des fréquences

Le diagramme donnant l'amplitude des diverses composantes s'appelle le *spectre* de la fonction.



Spectre en fréquence

<u>II- Calcul des coefficients</u>

2.1 – Formules de décompositions.

Les trois calculs intégrals suivants seront nécessaires à recherche des coefficients de la décomposition de la fonction $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega\, t + b_n \sin n\omega\, t)$ *avec* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega\, t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega\, t dt$$

α est un nombre arbitraire à choisir pour faciliter les calculs.
n=1 donne le fondamental.
n > 1 donne les harmoniques.

2.2 – Remarques pratiques.

On peut valoriser un certain nombre de symétries afin d'appréhender la valeur des coefficients de la série. Ainsi :

• Cas d'une fonction *f(t)* paire tel que *f(t) = f(-t)*

On choisira un intervalle d'étude $(T) = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$ et on obtient les simplifications suivantes :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = 0$$

La décomposition ne laissera pas apparaître de termes en sinus dans sa décomposition. L'ensemble des coefficients b_n est donc nul quelle que soit la valeur n. La série de Fourier est de la forme $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t$

• Cas d'une fonction *f(t)* impaire tel que *f(-t) =- f(t)*

On choisira le même intervalle d'étude et on obtient les simplifications suivantes :

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt$$

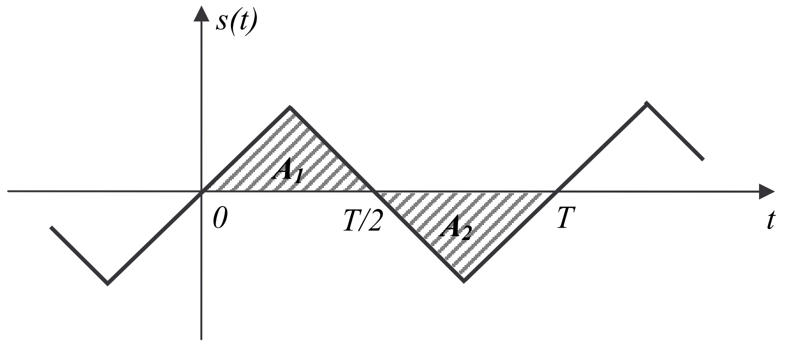
La valeur moyenne est nulle et il n'y a pas de termes en sinus dans sa décomposition. L'ensemble des coefficients a_n est donc nul quelle que soit la valeur n. La série de Fourier est de la forme $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$

On démontre également que :

•Pour une fonction *f(t)* telle que $f(t) = f(t + \frac{T}{2})$ seuls les coefficients de rang pair seront présents dans la décomposition.

•Pour une fonction *f(t)* telle que $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$ seuls les coefficients de rang impair subsisteront dans la décomposition.

<u>Exemple de signal</u> :



On remarque à la fois que $s(t)=-s(-t)$, $s(t)=-s(t+\frac{T}{2})$ et une égalité des surfaces A_1 et A_2.

On en déduit de ces propriétés l'homogénéïté de la décomposition : $s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t \qquad k \in N.$

2.3 – Identité de Parseval

L'égalité qui suit exprime que l'énergie d'une fonction est égale à la somme des énergies de ses harmoniques, la valeur efficace d'une fonction peut donc se déduire des coefficients de sa décomposition en série de Fourier :

$$\underbrace{F^2 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt}_{\substack{\textit{carré de la}\\ \textit{valeur efficace}}} = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$$

où a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f

2.4 – Taux de distorsion harmonique

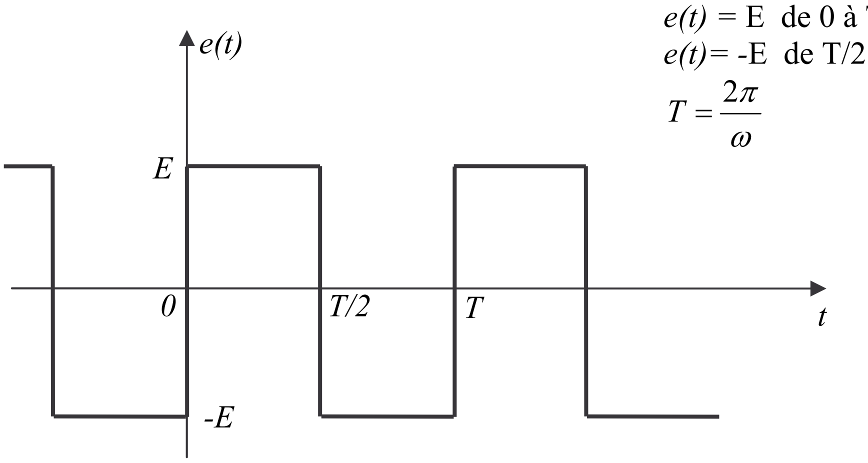
Chiffrer le taux de distorsion revient à déterminer l'importance des harmoniques face au fondamental. Il est établi par le rapport :

$$d = \frac{\text{valeur efficace de l'ensemble des harmoniques}}{\text{valeur efficace du fondamental}} = \frac{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}}{a_1}$$

III- Exemple de décompositions.

Nous allons étudier le signal rectangulaire *e(t)* ci-dessous. Celui-ci a une valeur moyenne nulle, il n'y a donc pas de composante continue.

e(t) = E de 0 à T/2
e(t)= -E de T/2 à T
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$



Les considérations vues dans le chapitre 2.2 nous apprennent que la décomposition sera de la forme

$e(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$ avec $b_n = \dfrac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} E \sin n\omega t \; dt$ *On sait aussi que seuls les termes impaires seront présents*

$$b_n = \frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t \; dt = \frac{4E}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-4E}{n2\pi}\left[\cos\frac{n2\pi t}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{-4E}{n2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

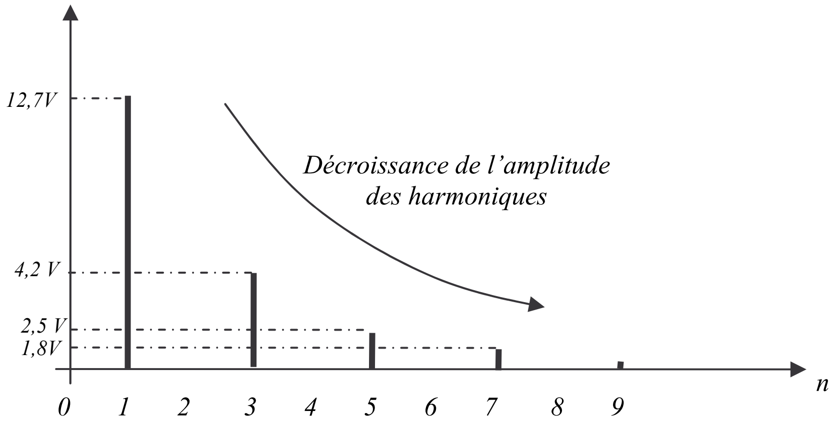
On vérifie que si n est pair on obtient $b_n=0$

Il vient : $b_1 = \dfrac{4E}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \dfrac{4E}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \dfrac{4E}{5\pi} + ... + b_{2k} = 0$ et $b_{2k+1} = \dfrac{4E}{\pi(2k+1)}$

Le signal *s(t)* admet comme fonction :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega \mathrm{t} + \frac{1}{3}\sin 3\omega\, t + \frac{1}{5}\sin 5\omega\, t + ... + \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\omega\, t\right) = \sum_{k=0}^{N}\frac{4E}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)\omega\, t$$

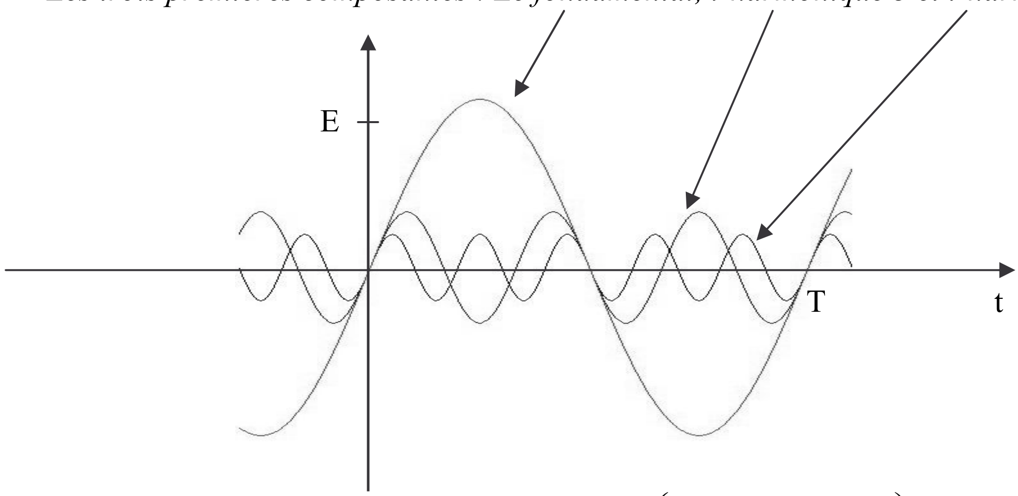
Spectre du signal pour E=10 V



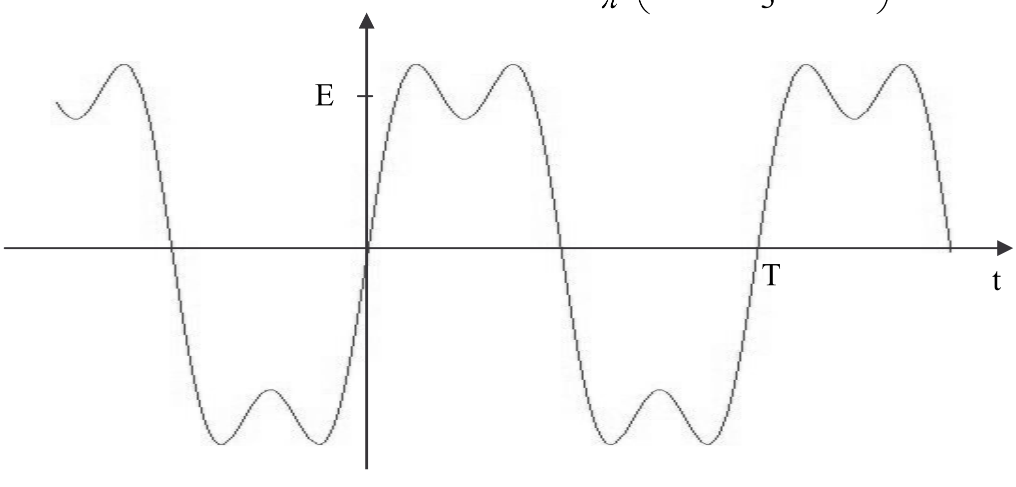
Synthèse de Fourier

D'une manière réciproque, nous pouvons reconstituer le signal initial en faisant la somme des différentes composantes. Les graphiques suivants montrent les sommes partielles de la série de la fonction précédente. Au fur et à mesure que nous prenons en compte un plus grand nombre d'harmoniques nous observons une convergence de la série vers le signal rectangulaire d'origine.

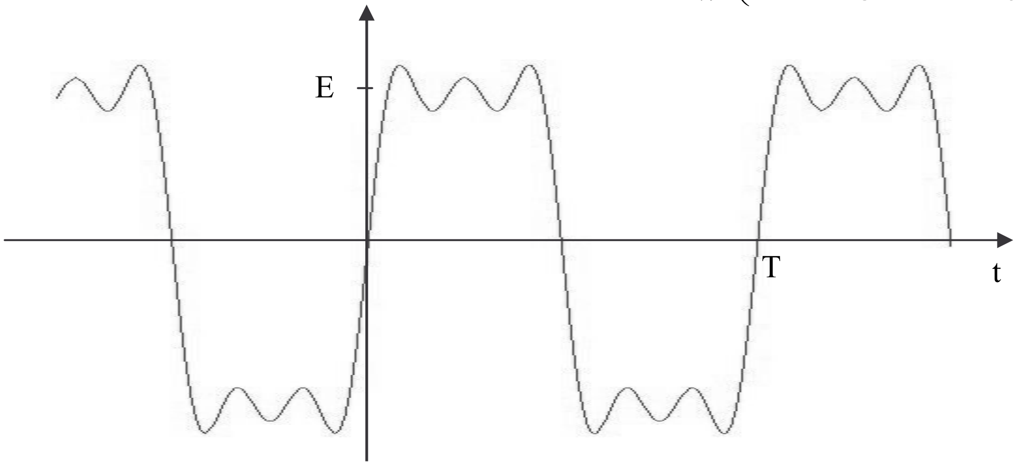
• *Les trois premières composantes : Le fondamental, l'harmonique 3 et l'harmonique 5*



• *Le fondamental + l'harmonique 3* $s(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega\,\mathrm{t} + \frac{1}{3}\sin 3\omega\, t\right)$



• *Le fondamental + les harmoniques 3 et 5* $s(t) = \dfrac{4E}{\pi}\left(\sin\omega\,\mathrm{t} + \dfrac{1}{3}\sin 3\omega\, t + \dfrac{1}{5}\sin 5\omega\, t\right)$



• *Le fondamental + les harmoniques 3,5,7,9,11,13,15,17,19 et 21*