Lois Physiques

Chapitre 8
Les vecteurs

G. MALEJACQ

I- Définitions.

1.1 Champs de vecteurs, champs de scalaires.

L'importance du calcul vectoriel provient de son utilisation intensive en physique. Tous les éléments caractérisés par une direction, un sens et une intensité seront des vecteurs ; la force, la vitesse, les champs électriques ou magnétiques en sont des exemples.

La notion de « **champ** » est une notion importante en physique. Elle permet d'appréhender dans toute son étendue spatiale une grandeur. Un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur tandis qu'un champ de scalaires y associe un réel, voyons deux exemples :

• La figure 1 est celle d'un champ barométrique, qui est un champ scalaire caractérisant la pression en tout point de l'espace.
• La figure 2 montre un champ vectoriel qui caractérise la vitesse du vent en tout point de l'espace.

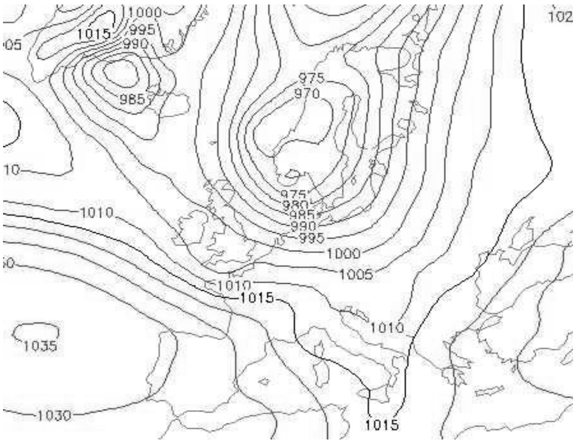


Fig 1

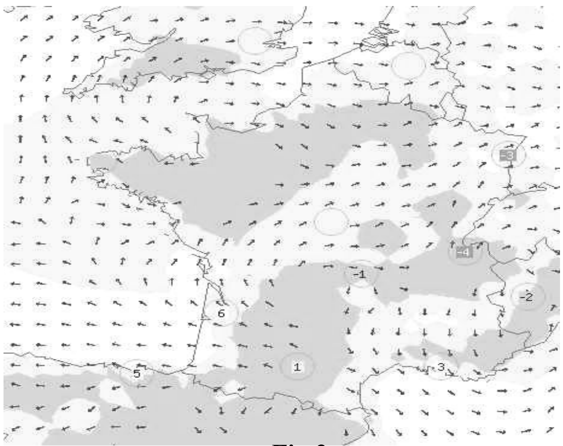


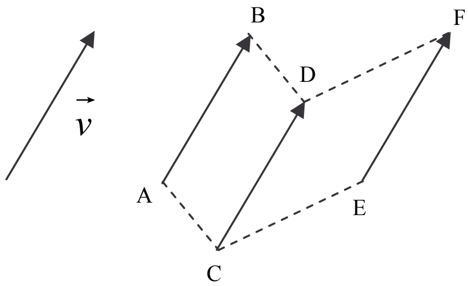
Fig 2

Nous traiterons dans ce chapitre des opérateurs mathématiques capables de manipuler ces deux éléments. Comme vous le savez les composantes vectorielles d'un vent sont liées aux lignes de pression. Nous verrons par la suite qu'en électricité des corrélations existent aussi entre les différents champs.

1.2 Propriétés.

1.2.1 Représentation.

On notera $\vec{v}$ un vecteur, il peut être représenté d'une infinité de façons. Dans la figure ci-contre il est montré trois représentant du vecteur $\vec{v}$ où $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

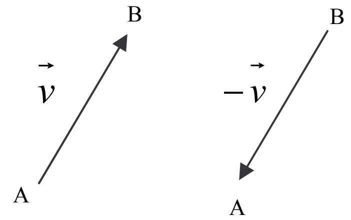


Cas particulier : Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est un représentant du vecteur appelé vecteur nul. On le note $\vec{0}$

1.2.2 Egalité de deux vecteurs.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

1.2.3 Vecteurs opposés.



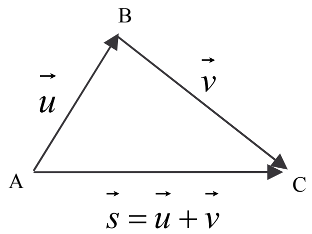
Le vecteur opposé du vecteur $\vec{v}$ est obtenu en changeant uniquement le sens à $\vec{v}$. Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

1.2.4 Relation de Chasles.

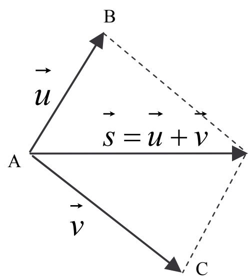
Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Quel que soit le point C, nous aurons toujours $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

1.2.5 Addition de deux vecteurs.

Ci-dessous à gauche, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs représentés respectivement par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\vec{s}$ représenté par $\overrightarrow{AC}$ est appelé vecteur somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

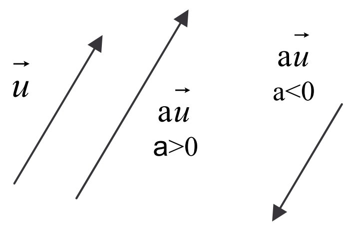


En peut aussi considérer une somme de la manière suivante →



1.2.6 Produit d'un vecteur par un réel.

Soit un vecteur $\vec{u}$ représentés par $\overrightarrow{AB}$ et un réel a. Si a est positif $a\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction et même sens. Si a est négatif $a\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction mais sont de sens contraire.



1.2.7 Vecteurs colinéaires.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires, s'ils existe un réel *k* tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont alors la même direction.

1.2.8 Module d'un vecteur.

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur représentant $\vec{u}$, On appelle module ou norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur du segment AB. On note ce module $|\overrightarrow{AB}|$ ou $\|\overrightarrow{AB}\|$.

1.2.9 Vecteur unitaire.

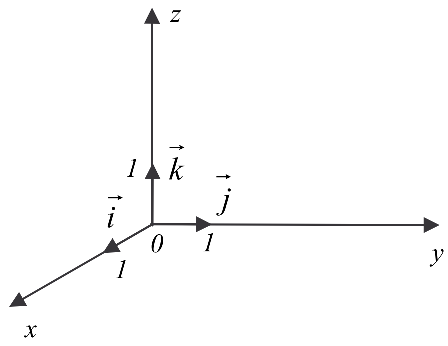
Un vecteur unitaire est vecteur dont la norme est égale à 1 qui est utilisé pour caractériser la direction d'un vecteur quelconque. Ainsi, pour définir un vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{i}$ comme vecteur unitaire, on écrira $\vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{i}$

Pour rendre un vecteur $\vec{u}$ unitaire, on le divise par son module : $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

II- Coordonnées.

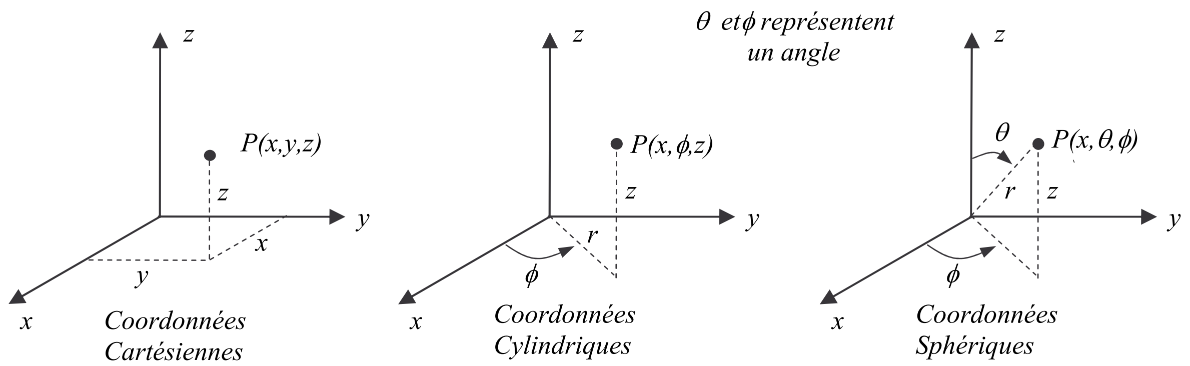
2.1 Repère du plan et de l'espace.

Soit un repère de l'espace où l'on désigne par O un point quelconque et par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 3 vecteurs non colinéaires 2 à 2 et non coplanaires 2 à 2.
Le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est orthogonal si les droites qui portent les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont orthogonales 2 à 2. Il est ***orthonormal*** si, en plus, les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont même longueur, celle-ci étant prise comme unité de longueur (on parle alors de repère ***orthonormé***).



2.2 Les différents systèmes de coordonnées.

Un point P est définissable par trois coordonnées *(x,y,z)* dans le système Cartésien, *(r,ϕ,z)* dans le système cylindrique et *(r,θ, ϕ)* dans le système sphérique. Nous utiliserons ici massivement les coordonnées Cartésiennes.

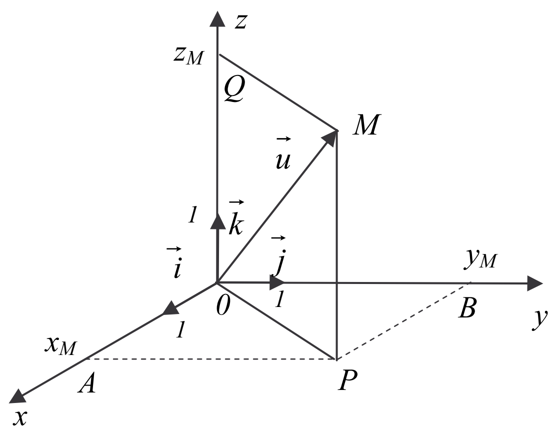


2.3 Coordonnées Cartésiennes d'un point, d'un vecteur.

2.3.1 Présentation

A partir de la relation de Chasles qui donne dans la figure ci-contre $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, on démontre facilement que $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$.

Les trois éléments (x_M, y_M, z_M) forment les coordonnées de M dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Si $\overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\vec{u}$ on dit qu'ils sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base β($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).



On notera indifféremment $\vec{u}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}_\beta$ ou $\vec{u} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$ ou $\vec{u} = (x_M, y_M, z_M)$

2.3.2 Propriétés

• Norme d'un vecteur dans un repère orthogonal.
Les triangles OPM et OAP étant rectangles en P et en A, nous pouvons écrire :
$OM^2 = OP^2 + PM^2$ $OP^2 = OA^2 + AP^2 = OA^2 + OB^2$ comme PM=OQ il vient $OM^2=OA^2+OB^2+OQ^2$

On en déduit que si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta$ alors $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• Somme de deux vecteurs.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_\beta$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}_\beta$

• Coordonnées d'un vecteur défini par un représentant.

Soit deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

Sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ on en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}_\beta$

• Vecteur nul.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_\beta = \vec{0}$ si x = y = z = 0

• **Egalité.**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\beta} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\beta}$ si $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$

• **Produit d'un vecteur avec un réel.**

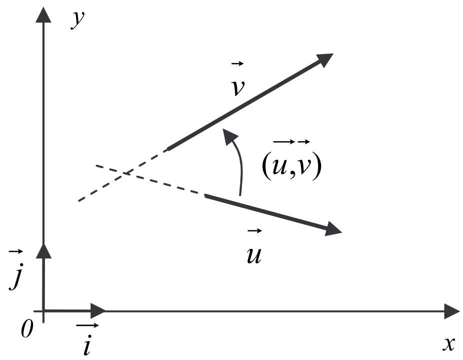
$k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}_{\beta}$

<u>III- Produit scalaire.</u>

3.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre (un scalaire) qui est égal au produit des longueurs des deux vecteurs par le cosinus de l'angle de ces deux vecteurs.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$



3.2 Propriétés

Si l'on considère $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et α, β deux réels.

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ commutativité, symétrie.

• $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{u_1} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{u_2}\, \vec{v}$ distributivité par rapport à l'addition vectorielle.

• $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$ associativité des scalaires

• $\vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2$ car l'angle d'un vecteur avec lui-même est nul : *($\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0$)*

3.3 Expression analytique du produit scalaire.

a) *Dans un plan orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).*

On peut écrire $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{0}$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Conséquence : si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2 = x^2 + y^2$ d'où $|\vec{u}|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) ***Dans une base orthonormée (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)***

On peut écrire $\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$ et $\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{i}\,.\,\vec{k} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0$

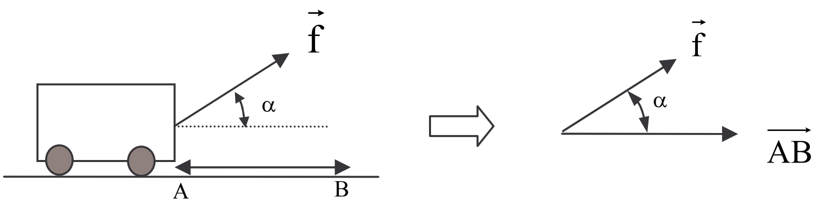
Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

D'où on déduit comme précédemment $|\vec{u}|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3.4 Application en physique.

L'exemple fondamental apparaît en dynamique avec le travail d'une force : si une force $\vec{f}$ déplace un corps selon un chemin rectiligne AB alors le travail fourni est donné par la formule

$$W_{joule} = |\,\vec{f}\,|.|\,\overrightarrow{AB}\,|.\cos(\alpha) = \vec{f}\,.\,\overrightarrow{AB}$$



$|\,\vec{f}\,|$ désignant l'intensité de la force, $|\,\overrightarrow{AB}\,|$ la longueur du déplacement et α l'angle entre les directions de la force et du déplacement.

IV- Produit vectoriel.

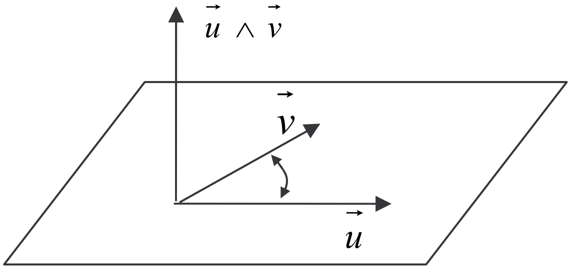
Le produit vectoriel de deux vecteurs engendre un autre vecteur situé dans un plan différent.

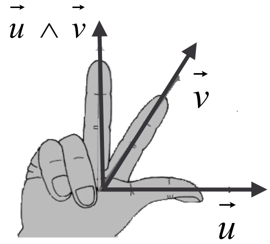
En conséquences nous considèrerons uniquement ici les vecteurs à trois composantes c'est-à-dire de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Un vecteur plan $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ pourra cependant être considéré en désignant la troisième composante nulle $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$

4.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui est défini de la manière suivante :

- La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est celle de la perpendiculaire au plan défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est celui obtenu par la *règle des trois doigts de la main droite* (dite aussi du *bonhomme d'Ampère* ou du *tire-bouchon*) : $\vec{u}$ = *pouce*, $\vec{v}$ = *index* et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ = *majeur*.
- Le module du produit vectoriel est : $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \sin(\vec{u}\ \vec{v})$





4.2 Propriétés

Si l'on considère $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et α, β deux réels.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

• $\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$ commutativité, symétrie.

• $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{u_1} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{u_2} \wedge \vec{v}$ distributivité par rapport à l'addition vectorielle.

• $(\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$ associativité des scalaires.

4.3 Expression analytique du produit vectoriel.

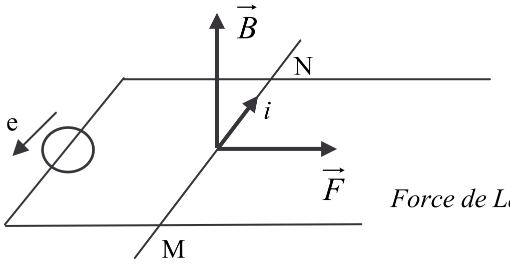
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe

On peut écrire : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}$ $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\mathrm{k}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{i}}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$ $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \vec{0}$ $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \vec{0}$ $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \vec{0}$

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ Le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $(\vec{u} \wedge \vec{v})\begin{pmatrix} yz'-zy' \\ zx'-xz' \\ xy'-yx' \end{pmatrix}$

4.4 Application en physique.

La force électromagnétique subie par un conducteur MN dont une partie de longueur l (NM=l) se trouve placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par la relation $\vec{F} = i\,\vec{l} \wedge \vec{B}$



Force de Laplace

V- Les opérateurs vectoriels.

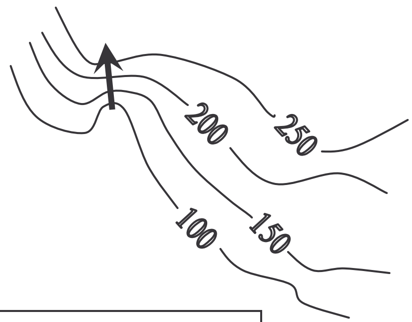
Les notions suivantes ne sont pas obligatoires pour notre unité de valeur, elles sont néanmoins importantes à la culture scientifique d'un auditeur. Il s'agit de généraliser à plusieurs variables la notion de dérivée. La fonction à dériver est soit un scalaire, soit un vecteur. On appelle fonction scalaire une expression comme $V = x^2 + y^2 + z^2$ et une fonction vectorielle comme $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ sur les trois axes de coordonnées.

5.1 Le gradient.

On dérive un scalaire et l'on obtient un vecteur : $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\ V$

Qui signifie que les trois composantes du vecteur $\vec{U}$ sont : $U_x = \dfrac{\partial V}{\partial x},\quad U_y = \dfrac{\partial V}{\partial y},\quad U_z = \dfrac{\partial V}{\partial z}$

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ de scalaires et le transforme en un champ de vecteurs. Le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ de scalaires, et l'intensité de cette variation. Par exemple, le gradient de l'altitude (cas des lignes de niveau d'une carte) est dirigé selon la ligne de la plus grande pente et sa norme augmente avec la pente.



Présentation de la dérivée partielle

Considérons la fonction à deux variables $f(x,y)=x^3+x^2y+xy^2+y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est la dérivée partielle de f par rapport à x (y est considérée constante) :* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *est la dérivée partielle de f par rapport à y (x est considérée constante):* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3y^2$

5.2 La divergence.

On dérive un vecteur et l'on obtient un scalaire :

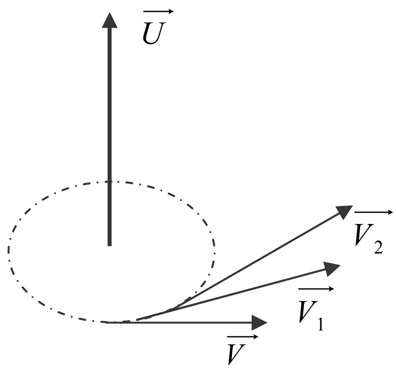
Soit $\vec{B}$ =(B_x, B_y, B_z) un vecteur, la divergence de $\vec{B}$ s'exprime par $div\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_Z}{\partial z}$

La divergence d'un champ vectoriel exprime sa tendance à provenir ou à diverger vers certains points.

5.3 Rotationnel.

Le rotationnel transforme un champ de vecteur en un autre champ de vecteur. Il exprime la tendance qu'à un champ à tourner autour d'un point.

Ce qui donne $\vec{U} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$



Soit $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$

$$U_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad U_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_Z}{\partial x} \quad U_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Ces deux vecteurs sont disposés à angle droit l'un par rapport à l'autre. Le vecteur $\vec{V}$ "tourne" autour de $\vec{U}$.

5.3 Propriétés.

On démontre que :

- $div(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = 0$ et $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,U) = 0$
- $\overrightarrow{grad}\,(U + V) = \overrightarrow{grad}\,U + \overrightarrow{grad}\,V$
- $div(\vec{A} + \vec{B}) = div\,\vec{A} + div\,\vec{B}$
- $\overrightarrow{grad}\,(U \times V) = \overrightarrow{Ugrad}\,V + V\,\overrightarrow{grad}\,U$
- $div(g\vec{A}) = \vec{A}\,\overrightarrow{grad}\,\mathrm{g} + g\,div\,\vec{A}$