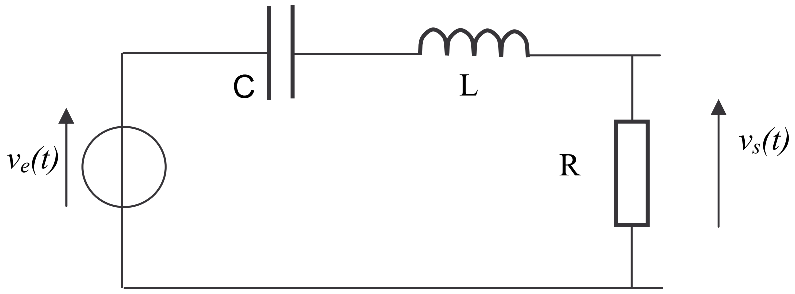
EQUATIONS DIFFERENTIELLES	Exercices

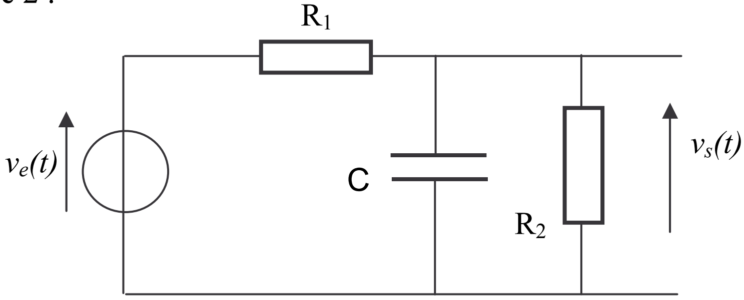
Exercice 1

1- Donner les équations régissant l'évolution des grandeurs $v_s(t)$ et $v_e(t)$ dans les montages ci-dessous.
2- En déduire la valeur $\lim\limits_{t\to\infty} v_s(t)$ lorsque $v_e(t)$ est une tension continue E.

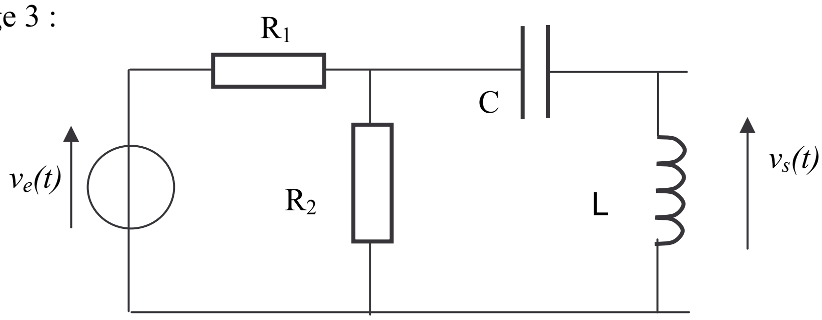
Montage 1 :



Montage 2 :



Montage 3 :



Exercice 2

Soit l'équation différentielle $y' + y = x$ ou y désigne une fonction dérivable de la variable x et y' sa dérivée.

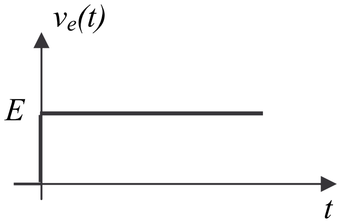
1- Résoudre l'équation $y' + y = 0$

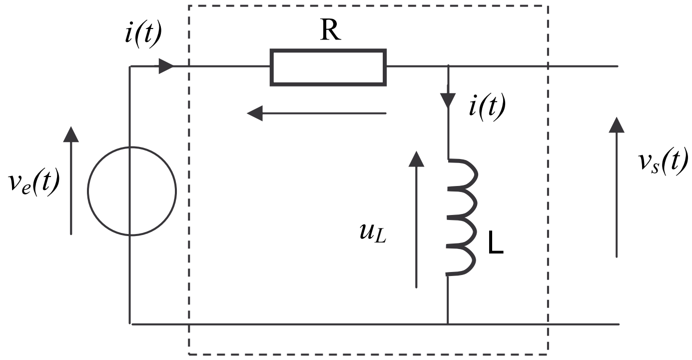
2- Déterminer a et b pour que la fonction $g(x)=ax + b$ soit une solution de l'équation $y' + y = x$

3- Vérifier que la fonction $f(x)=k\, e^{-x} + x -1$ est solution de l'équation $y'+y = x$. Déterminer k pour que $f(0) =0$

Exercice 3

1- Donner l'équation différentielle régissant l'évolution de $v_e(t)$ et $v_s(t)$ dans le montage ci-dessous :





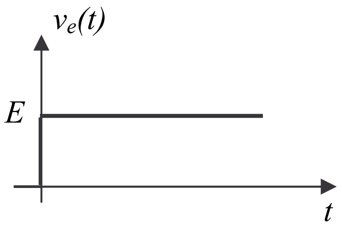
2- Résoudre cette équation pour le cas d'un échelon de tension en $v_e(t)$. *(On pose $i(0) = 0$)*

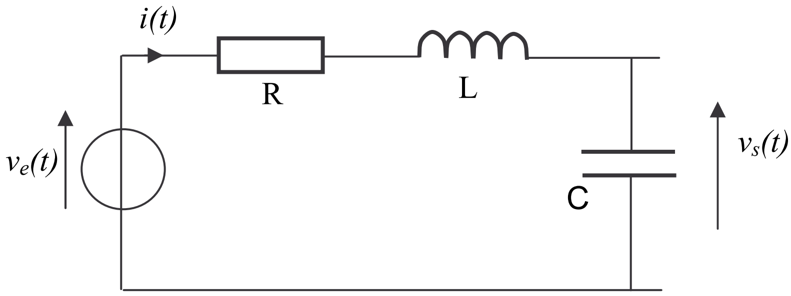
3- Quelle est l'expression de la constante de temps de circuit.

4- Représenter l'évolution de $v_s(t)$.

Exercice 4

Réponse à un échelon d'un système du second ordre.





1- Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme $s''(t)+2m\omega_0 s'(t)+\omega_0^2 s(t)=E\omega_0^2$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $RC = \dfrac{2m}{\omega_0}$.

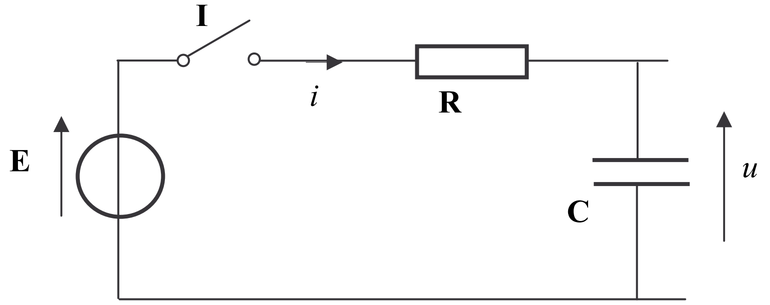
2- Déduire de cette équation différentielle une fonction de transfert complexe $\underline{A} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.

3- Donner une solution particulière de l'équation complète.

4- Donner les différentes solutions de l'équation sans second membre suivant les solutions possibles de l'équation caractéristique *(les solutions étant de la forme $s=\alpha\, e^{rt}$).*

Exercice 5

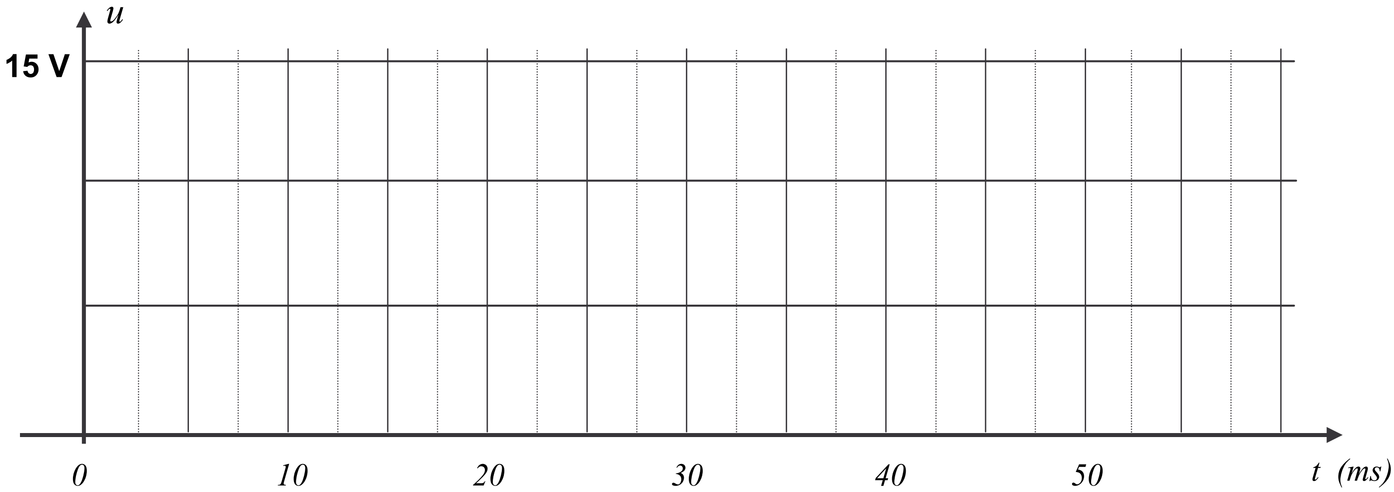
Soit un circuit RC alimenté par un générateur de tension continu E par le biais d'un interrupteur I.
Valeurs numériques : E=15 V ; R = 10 kΩ ; C = 1µF



1- A l'instant choisi comme origine des temps, on ferme l'interrupteur. Donner la fonction temporelle de la tension *u* aux bornes du condensateur. En déduire la fonction du courant *i*.

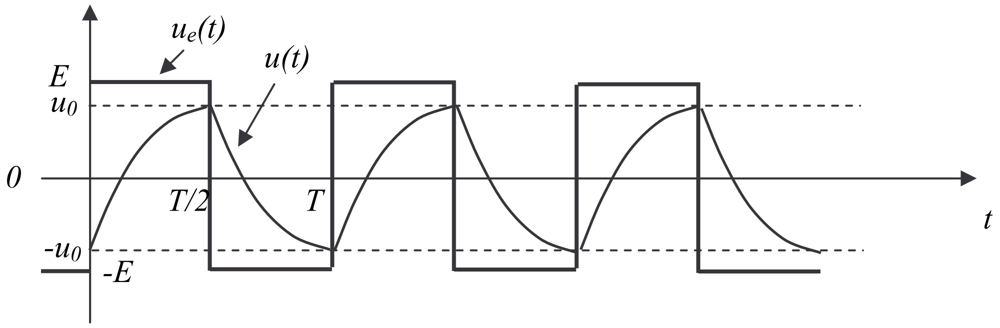
2- Calculer le temps t_1 au bout duquel la tension aux bornes du condensateur sera de 0,99E.

3- Tracer sur un même repère le chronogramme de la tension *u* et du courant *i*.



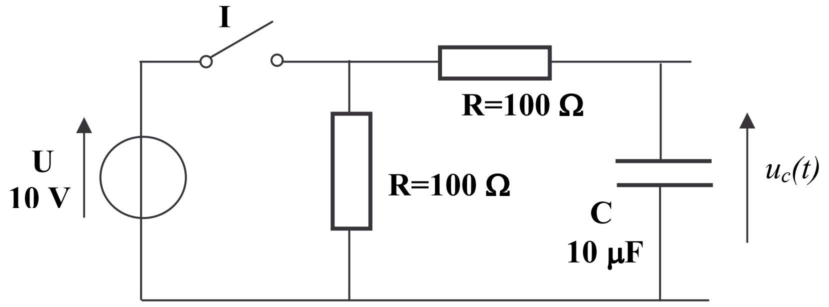
4- Le générateur est remplacé par un générateur de tension $u_e(t)$ en créneau variant de +E à –E et de période T. On suppose que les variations de la tension $u(t)$ se font de ± u_o comme le montre le chronogramme ci-dessous. Exprimer u_o en fonction des grandeurs déjà citées.

Application numérique : T=4τ



Exercice 6

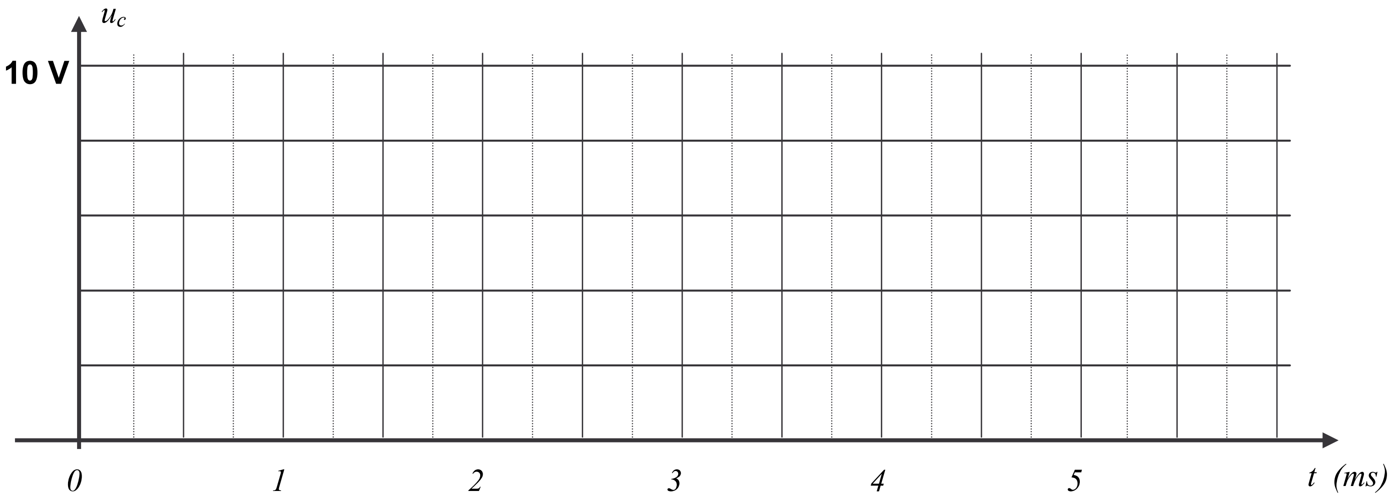
Dans le montage suivant, I est un interrupteur.



1- On ferme I, calculer de temps mis par le condensateur pour se charger de 0 à 8 V (on considère $u_c(0)=0$)

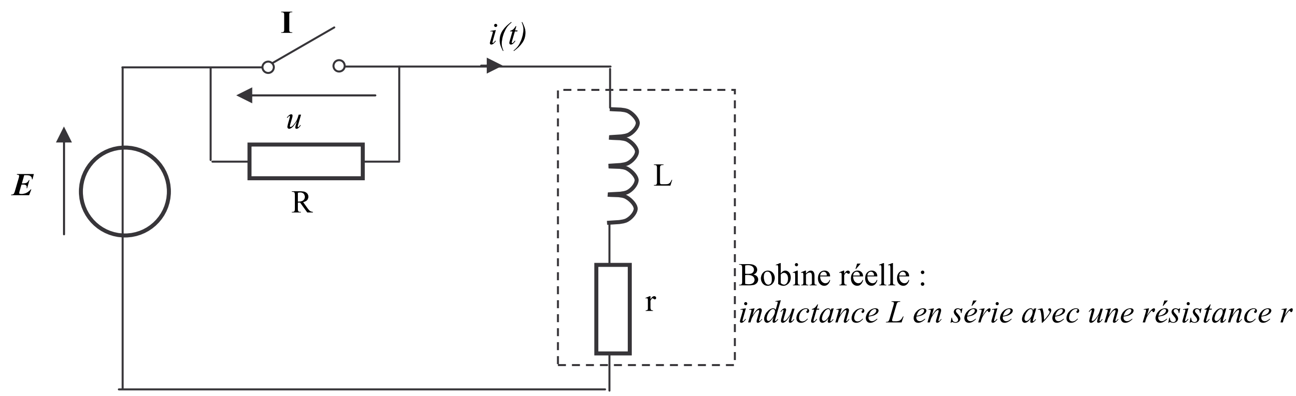
2- Au moment où $u_c(0)=8\ V$ on ouvre I, le condensateur se décharge. Calculer le temps mis par u_c pour évoluer de 8 V à 2 V.

3- Tracer les deux évolutions précédentes de u_c sur ce chronogramme :



Exercice 7

Pour mettre en évidence les problèmes liés à la discontinuité des courants polarisant les circuits inductifs (bobine, moteur …) nous allons étudier le montage ci-dessous. Une résistance R est placée en parallèle avec l'interrupteur afin d'évaluer la tension à ses bornes lors de son ouverture.



1- Donner l'intensité *Io* dans le circuit sachant que le courant est établi depuis longtemps (régime permanent après la fermeture de I).

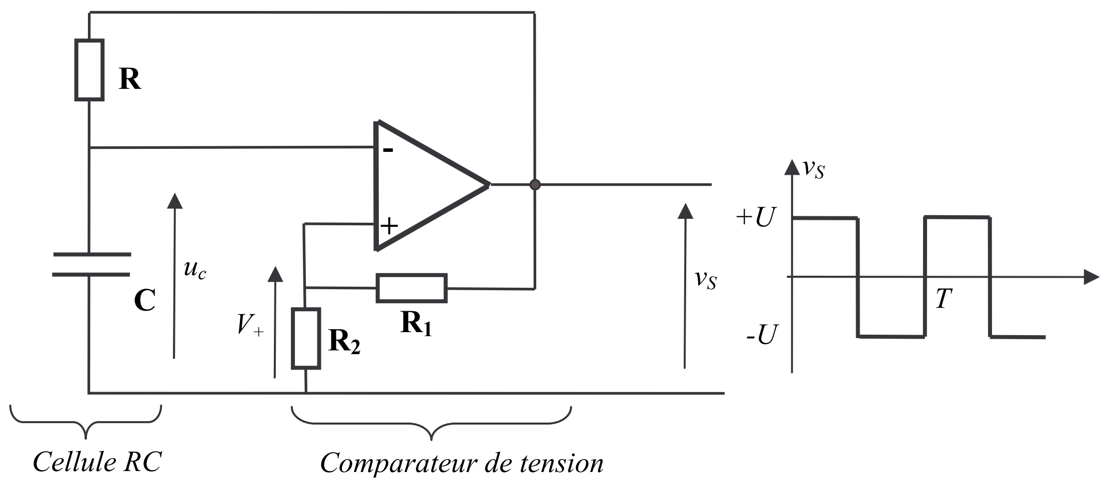
2- On ouvre l'interrupteur à $t=0$, Déterminer la fonction temporelle de l'évolution de l'intensité $i(t)$ dans le circuit. Examiner le comportement limite lorsque la résistance R est considérée très grande.

3- Déterminer la fonction temporelle de l'évolution de l'intensité $u(t)$ aux bornes de l'interrupteur. Que se passe-t-il si R est considérée infiniment grande ?

Exercice 8

Etude d'un oscillateur à relaxation.

Le montage suivant génère un signal « carré » dont la fréquence est fonction des éléments du circuit.



L'amplificateur opérationnel fonctionne ici en comparateur de tension. Il s'agit d'un régime non linéaire que nous n'avons pas étudié au chapitre 5. Dans ce régime le composant travail et régime de saturation, les tensions V+ et V- ne sont pas forcément égales.

- Lorsque u_c < V+ on a v_s = +U et il se produit une charge du condensateur.
- Lorsque u_c > V+ on a v_s = -U et il se produit une décharge du condensateur.

1- Après avoir caractérisé les deux tensions de seuil du comparateur (v_s évoluant sur ±U), donner sur un même repère les chronogrammes de $v_s(t)$ et $u_c(t)$ *(vous pouvez vous inspirer de l'exercice 5)*.

2- Donner les fonctions caractérisant la charge et la décharge du condensateur sur une période. En déduire une expression de la fréquence du signal disponible en v_s.