Lois Physiques

Chapitre 7
Matrices et Quadripôles

G. MALEJACQ

MATRICES ET QUADRIPÔLES

I- LES QUADRIPÔLES

En modélisant le comportement électrique d'un composant (ou d'une association de composants) par un circuit élémentaire possédant deux bornes de sortie et deux bornes d'entrée, nous définissons un quadripôle (fig 1) :

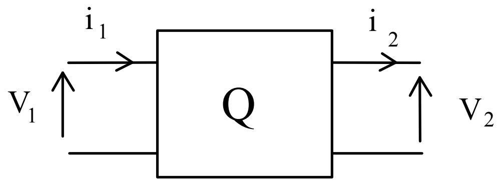


Figure 1

Remarque: Le sens des courants i_1 et i_2 est arbitraire, il suffit de prendre soin d'adapter les expressions au sens choisi, cependant le courant $i_2$est très souvent préféré "rentrant".

Les grandeurs électriques misent en jeu autour de cet élément sont liées entre elles par ces coefficients appelés paramètres du quadripôle, qui, pour le cas d'un système considéré linéaire, seront au nombre de quatre.

De ce fait, les grandeurs V_1, V_2, i_1 et i_2 sont unies par des relations linéaires qui peuvent établir six systèmes différents d'équations. Aussi, la notation matricielle convient parfaitement pour résoudre ce type de système.

1- **Les différentes matrices**

1.1- La matrice impédance

Lorsque i_1 et i_2 sont choisies pour variables, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} V_1 = z_{11}.i_1 + z_{12}.i_2 \\ V_2 = z_{21}.i_1 + z_{22}.i_2 \end{cases} \qquad \text{ou sous forme matricielle} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

en notant $Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$ la matrice impédance.

1.2- La matrice hybride

Lorsque V_1 et i_2 sont les fonctions et i_1 et V_2 les variables, il vient:

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}.i_1 + h_{12}.V_2 \\ i_2 = h_{21}.i_1 + h_{22}.V_2 \end{cases} \qquad \text{ou sous forme matricielle} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

en notant $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ la matrice hybride du quadripôle.

1.3- La matrice de transfert (ou chaîne)

En exprimant les grandeurs d'entrées en fonction des grandeurs de sorties, il vient:

$$\begin{cases} V_1 = a_{11}.V_2 + a_{12}.i_2 \\ i_1 = a_{21}.V_2 + a_{22}.i_2 \end{cases}$$

ou en utilisant $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ la matrice de transfert : $\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$

1.4- La matrice admittance

Avec V_1 et V_2 choisies pour variables, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}.V_1 + y_{12}.V_2 \\ i_2 = y_{21}.V_1 + y_{22}.V_2 \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

La notation matricielle montre aisément que la matrice Y est l'inverse de la matrice Z :
$Y = Z^{-1}$ ou $Z = Y^{-1}$

1.5- La matrice hybride inverse

Lorsque V_1 et i_2 sont choisies pour variables, il vient :

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}.V_1 + g_{12}.i_2 \\ V_2 = g_{21}.V_1 + g_{22}.i_2 \end{cases} \qquad \text{ou le système matricielle} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

On remarquera que $G = H^{-1}$ et $H = G^{-1}$ avec $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

1.6- La matrice de transfert inverse

Lorsque V_1 et i_1 sont choisies pour variables, il s'ensuit que :

$$\begin{cases} V_2 = b_{11}.V_1 + b_{12}.i_1 \\ i_2 = b_{21}.V_1 + b_{22}.i_1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

La matrice chaîne inverse n'est pas l'inverse de la matrice chaîne directe.

2- **Correspondance entre les paramètres d'une matrice**

On a déjà remarqué précédemment, qu'un type de matrice pouvait être déterminé par une autre (cas des inversions). Il est possible en effet d'établir des relations de passage entre chacun des paramètres.

Le tableau de la figure 2 donne les formules de passage entre les matrices les plus utilisées. Le signe entre parenthèses, devant certaines expressions, convient à un sens opposé du courant i2 (courant rentrant).

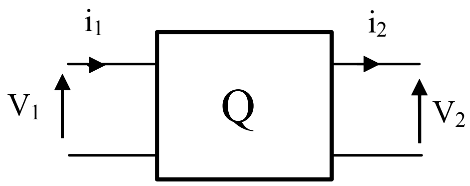


Figure 2

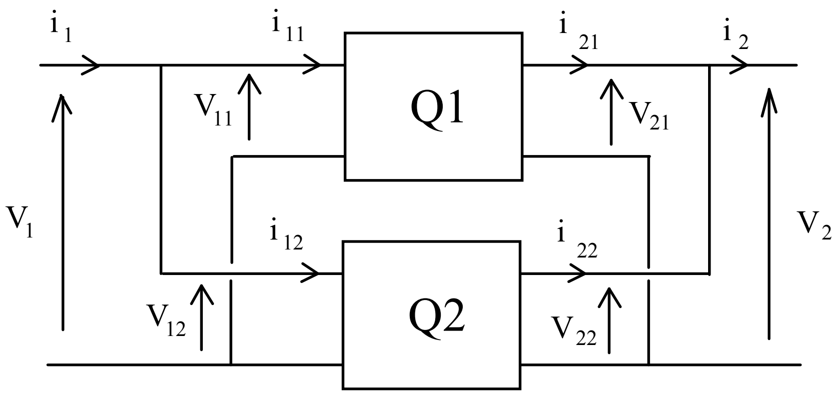
	Impédance Z	***Admittance Y***	***Hybride H***	***Transfert A***
Z		$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & \frac{-y_{12}}{\Delta_y} \\ \frac{-y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & (+)\frac{-\Delta_a}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & (+)\frac{-a_{22}}{a_{21}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_z} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & \frac{-\Delta_a}{a_{12}} \\ (-)\frac{1}{a_{12}} & (+)\frac{-a_{11}}{a_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{-z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{-y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \end{matrix}$		$\begin{matrix} \frac{a_{12}}{a_{22}} & \frac{\Delta_a}{a_{22}} \\ (-)\frac{1}{a_{22}} & (+)\frac{-a_{21}}{a_{22}} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & (+)\frac{-\Delta_z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & (+)\frac{-z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-y_{22}}{y_{21}} & (-)\frac{1}{y_{21}} \\ \frac{-\Delta_y}{y_{21}} & (-)\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\Delta_h}{h_{21}} & (-)\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & (-)\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	

II ASSOCIATION DE QUADRIPOLE.

L'objectif d'une telle modélisation est de définir un outil mathématique permettant la synthèse d'une association de quadripôle. Un calcul matriciel simple sera en mesure de définir les paramètres du quadripôle résultant d'une combinaison de deux ou plusieurs sous-quadripôles.

2.1 Association en parallèle.

Elle consiste à placer les entrées et les sorties de deux ou plusieurs quadripôles en parallèle.



Il vient les égalités suivantes $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$

En utilisant les matrices admittance s de chaque quadripôle il vient

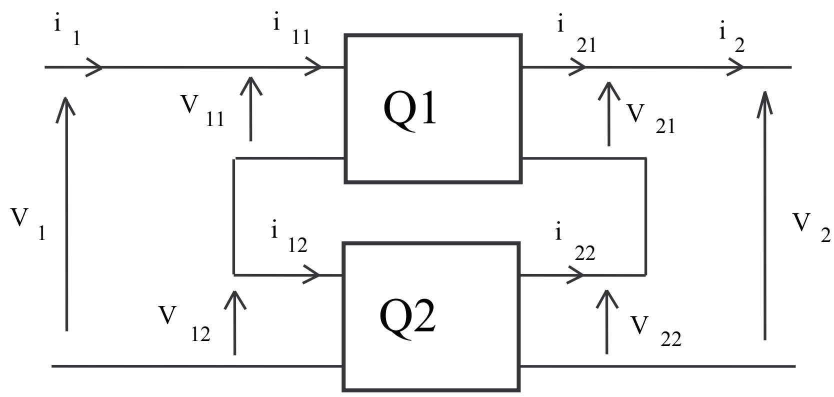
$\begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{21} \end{bmatrix} = Y_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{22} \end{bmatrix} = Y_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

or $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{22} \end{bmatrix}$ il s'ensuit que $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = (Y_1 + Y_2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

La matrice admittance d'une association parallèle est donc égale à la somme des matrices admittances de chaque quadripôle.

2.2 Association en série.

Les tensions en entrée et en sortie se retrouvent en séries. On remarque dans cette assiciation qu'effectivement $V_1=V_{11}+V_{12}$ et $V_2=V_{21}+V_{22}$



Il vient les égalités suivantes : $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{22} \end{bmatrix}$

et $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$

En utilisant les matrices impédances de chaque quadripôle il vient :

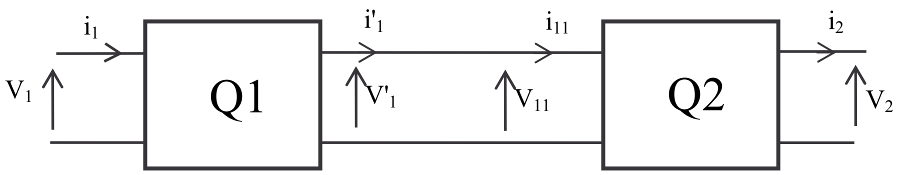
$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = Z_1 \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{21} \end{bmatrix}$ ainsi que $\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = Z_2 \begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{22} \end{bmatrix}$

On en déduit $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (Z_1 + Z_2) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

La matrice impédance d'une association série de quadripôles est donc égale à la somme des matrices impédances de chaque quadripôle

2.3 Association en cascade.

Une mise en cascade conduit à alimenter l'entrée d'un quadripôle par la sortie sortie d'un autre quadripôle. Une cascade de *n* cellules est envisageable.



On remarque bien que $i_{11} = i'_1$ et que $V_{11} = V'_1$

Il vient l'égalité suivante $\begin{bmatrix} v_{11} \\ i_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ i'_1 \end{bmatrix}$

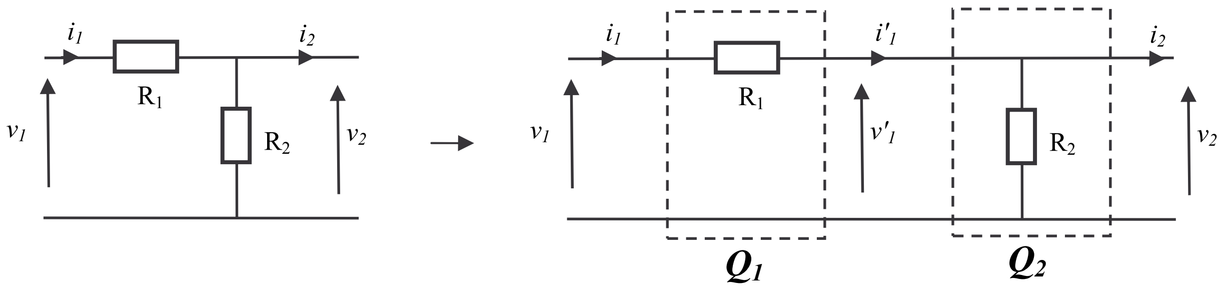
En utilisant les matrices de transfert de chaque quadripôle il vient

$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} v'_1 \\ i'_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} v_{11} \\ i_{11} \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$ comme $\begin{bmatrix} v_{11} \\ i_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ i'_1 \end{bmatrix}$ il s'ensuit que $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A_1 . A_2 \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$

La matrice de transfert d'une association en cascade de quadripôles est donc égale au produit des matrices de transfert de chaque quadripôle

Application :

Nous allons tenter de retrouver les expressions modélisant le montage du pont diviseur ci-dessous. Cette structure peut se décomposer en deux quadripôles élémentaires que nous modéliserons par leur matrice de transfert.

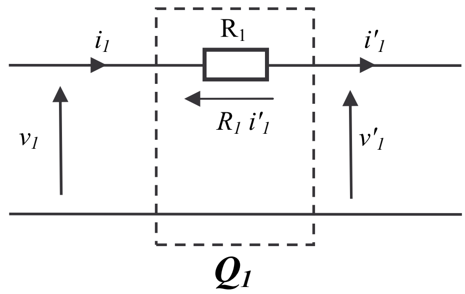


Modélisation du quadripôle Q_1

On recherche $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ i'_1 \end{bmatrix}$

Soit à identifier les coefficients du système suivant :

$v_1 = a_{11} v'_1 + a_{12}\, i'_1$
$i_1 = a_{21} v'_1 + a_{22}\, i'_1$

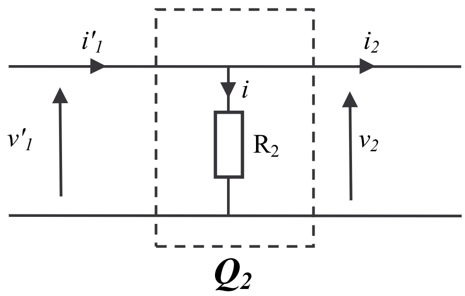


Or ici $i_1 = i'_1$ on en déduit que $a_{21} = 0$ et $a_{22} = 1$

La loi des mailles nous donne : $v_1 = R_1\, i'_1 + v'_1$
Il s'ensuit que $a_{11} = 1$ et $a_{12} = R_1$

La matrice de tranfert du quadripôle Q_1 est donc : $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Modélisation du quadripôle Q_2



L'analyse de la structure donne :

$v'_1 = v_2 = a_{11} v_2 + a_{12}\, i_2$

$i'_1 = i + i_2 = \dfrac{v_2}{R_2} + i_2 = a_{21}\, v_2 + a_{22}\, i_2$

La matrice de tranfert du quadripôle Q_2 est donc : $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$

La matrice de transfert de l'association s'obtient donc en faisant le produit $A_1.A_2$

Attention le produit de matrice n'est pas commutatif ! ! !

$$A = A_1.A_2 = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons que $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$

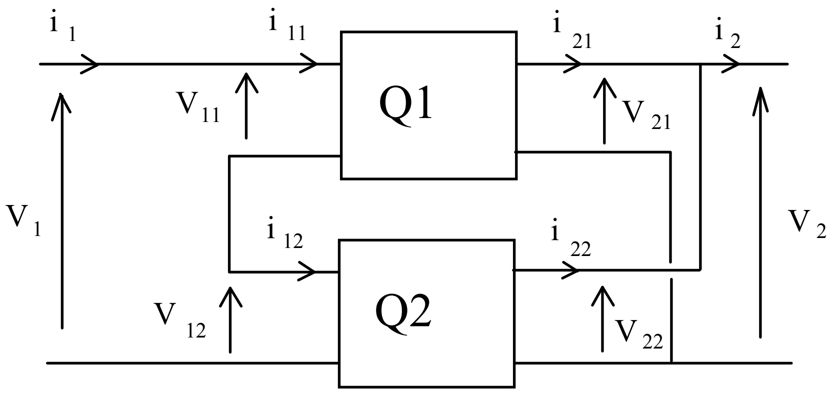
Expression de la fonction transfert du quadripôle résultant :

Le système résultant est $\begin{cases} (1) \quad v_1 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_2 + R_1 i_2 \\ (2) \quad i_1 = \frac{1}{R_2} v_2 + i_2 \end{cases}$

Dans la première équation il vient directement le rapport entre v_2 et v_1 lorsque $i_2 = 0$; le paramètre a_{11} de la matrice de transfert est donc l'inverse de la fonction de transfert.

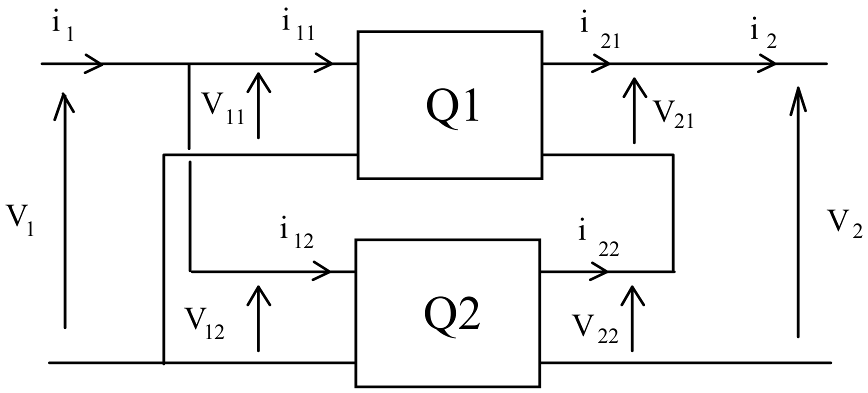
En effet $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)_{i_2=0} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ *on y reconnaît bien la formule du pont diviseur de tension.*

2.4 Association série / parallèle.



Elle consiste à placer les entrées en série et les sorties en parallèle. La matrice résultant de cette association est égale à la **somme des matrices hybrides** de chaque quadripôle.

2.5 Association parallèle / série.



Elle consiste à placer les entrées en parallèle et les sorties en série. La matrice résultant de cette association serait égale à la **somme des matrices hybrides inverses** de chaque quadripôle.