Lois Physiques

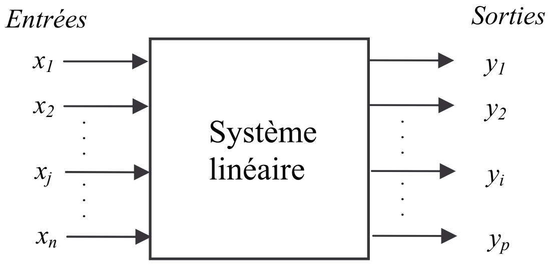
Chapitre 6
Algèbre linéaire, matrice 2x2

G. MALEJACQ

MATRICES

I- Introduction au calcul matriciel

1.1- Définition



Une matrice modélise un système linéaire où les sorties y_i sont des combinaisons linéaires des entrées x_i. La représentation suivante est celle du système d'écriture conventionnelle :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1j}x_j + .. + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2j}x_j + .. + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + .. + a_{ij}x_j + .. + a_{in}x_n \\ \vdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + .. + a_{pj}x_j + .. + a_{pn}x_n \end{cases}$$

La notation matricielle de ce système est :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & .. & a_{pj} & .. & a_{pn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad [Y] = [A].[X]$$

[A] est appelée la matrice du système. Il s'agit en général d'un tableau de nombres réels ou complexes à p lignes (indice i) et n colonnes (indice j) de coefficients notés a_{ij}.

II- Matrice 2x2

2.1- Définitions

2.1.1 Matrice d'une application linéaire

Une application est dite linéaire si et seulement si on a pour $f\ :\ (x_1, x_2)\ \mapsto\ (y_1, y_2)$

avec le système $\begin{cases} y_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 \\ y_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 \end{cases}$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont des constantes réelles appelées coefficients de f

On note : $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sont des MATRICES unicolonnes.

$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est la MATRICE de f, de coefficients a_{ij}. On note $\mathrm{M} = [\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}]$

M est ici une matrice 2x2, soit de 2 lignes et de 2 colonnes.

Exemple :

Si f est linéaire de matrice $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, alors $f : (x_1, x_2)\ \mapsto\ (2x_1 - 3x_2\ , 4x_1 + 5x_2)$

soit à considérer le système $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$

2.1.2 Déterminant d'une matrice 2x2

Soit $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ une matrice 2x2. On appelle déterminant la grandeur :

dét M=dét $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\, a_{22}\ -\ a_{21}\, a_{12}$

Exemple : $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ alors dét M=22

2.1.3 Cas particuliers

Matrice nulle : C'est la matrice de l'application nulle à savoir : $f : (x_1, x_2) \mapsto (0,0)$

Cette matrice se note $[0]$, dans ce cas : $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrice identique (ou unité) : C'est celle de l'identité à savoir : $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$

Cette matrice se note I, alors : $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2 Propriétés

2.2.1 Multiplication d'une matrice par un réel

Soit k un réel donné, f linéaire de matrice M, on définit l'application k.f par :
$(k.\mathrm{f}).[(x_1, x_2)] = (k.y_1, k.y_2)$ où $\mathrm{f}[(x_1, x_2)] = (y_1, y_2)$

Alors k.f est linéaire, sa matrice se note k.M et elle s'obtient en multipliant l'ensemble des coefficients de M par k.

$$\mathrm{k.[M] = k.} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} \\ k.a_{21} & k.a_{22} \end{bmatrix}$$

Exemple : $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2.2.2 Addition entre deux matrices

Soit f et g , deux applications linéaires, de matrices respectives M et N. On appelle f + g l'application définie par :
$[(x_1, x_2)] = f[(x_1, x_2)] + g[(x_1, x_2)]$

Alors f + g est linéaire, sa matrice, notée M + N , s'appelle la somme de M et N
Plus précisément,

$$\text{si } \mathrm{M} = [\mathrm{a_{ij}}],\ \mathrm{N} = [\mathrm{b_{ij}}] \quad \text{et} \quad \mathrm{M} + \mathrm{N} = [\mathrm{c_{ij}}]$$

On a, pour tout i et tout j :

$$\mathrm{c_{ij}} = \mathrm{a_{ij}} + \mathrm{b_{ij}} \qquad \text{(somme par "superposition" de M et N)}$$

si $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ alors $M + N = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

<u>Exemple</u> :

$f:(x_1,x_2) \mapsto (2x_1 - 3x_2 \, , x_1 + 4x_2)$ et $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$g:(x_1,x_2) \mapsto (2x_1 + 5x_2 \, , x_1 - 3x_2)$ et $N = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Alors : $M + N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\quad f + g:(x_1,x_2) \mapsto (4x_1 + 2x_2 \, , 2x_1 + x_2)$

2.2.3 Produit entre deux matrices

Soit f et g linéaires de matrices respectives M et N.
La matrice, notée N.M , s'appelle la matrice - produit de M par N

Si $M = [a_{ij}]$, $N = [b_{ij}]$ et $N.M = [c_{ij}]$, on a :

$$c_{11} = b_{11}.a_{11} + b_{12}.a_{21} \quad ; \quad c_{12} = b_{11}.a_{12} + b_{12}.a_{22}$$
$$c_{21} = b_{21}.a_{11} + b_{21}.a_{21} \quad ; \quad c_{22} = b_{21}.a_{12} + b_{22}.a_{22}$$

<u>Disposition pratique</u>:

Soit M= $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ et N= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ la disposition suivante permet un repérage du remplissage de N.M

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \leftarrow \textbf{M} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \textbf{N} & & \textbf{N.M} \end{array}$$

c_{11}= 1.3 + 2.(-2) = -1
c_{12}= 1.1 + 2.2 = 5
c_{21}= 0.3 + 5.(-2) = -10
c_{22}= 0.1 + 5.2 = 10

Chaque coefficient de N.M est à l'intersection d'une ligne de N et d'une colonne de M.

NB : On remarque qu'ici : $M.N \neq N.M$ en effet : $M.N = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

On démontre les résultats suivants :

L'addition et la multiplication des matrices sont associatives, seule l'addition est commutative.

$[0]$ est neutre pour l'addition, I est neutre pour la multiplication. La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

2.2.4 Inversion d'une matrice 2x2

Condition d'inversibilité :

Soit f linéaire de matrice $M[a_{ij}]$, f est bijective si et seulement si quels que soient (y_1, y_2) il existe (x_1, x_2) tel que $(y_1, y_2) = f[(x_1, x_2)]$. Ce qui revient à résoudre le système d'inconnue (x_1, x_2) suivant :

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 = y_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 = y_2 \end{cases}$$

Ce système a une solution unique en (x_1, x_2) si : $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} \neq 0$

Ce réel $a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$ est le déterminant de f (noté dét M)

On note : $\text{dét } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Théorème : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Dans ces conditions, on a :

$y_1 = b_{11}.x_1 + b_{12}.x_2$ et $y_2 = b_{21}.x_1 + b_{22}.x_2$

avec : $b_{11} = k.a_{22}$

$b_{12} = k.(-a_{12})$ et $k = (\text{dét } M)^{-1}$

$b_{21} = k.(-a_{21})$

$b_{22} = k.a_{11}$

On démontre donc ainsi que f est aussi LINEAIRE

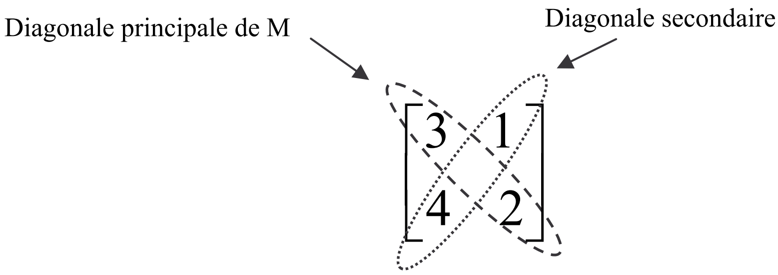
La matrice de f, notée M^{-1}, s'appelle la matrice INVERSE de M. Elle vérifie donc :

$$M.M^{-1} = M^{-1}.M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Principe :
Soit une matrice M , M^{-1} s'obtient à partir de A en changeant les termes de la diagonale principale, remplaçant les termes de l'autre diagonale par leur opposé et puis enfin en divisant tous les coefficients par dét M.

Exemple :

Soit $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$



$$\text{dét M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 3.2 - 4.1 = 2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{On a bien : } M.M^{-1} = M^{-1}.M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Application :

Résolution de systèmes d'équations linéaires 2x2

Dans le module PHR001 je vous avais présenté les méthodes d'élimination, de substitution, du pivot de Gauss, de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. On peut à présent leur adjoindre la méthode d'inversion de matrice, méthode particulièrement pratique dans certains problèmes sur les quadripôles.

En effet, soit à résoudre le système :

$$\text{Soit } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$\text{Pour } M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ , on a } \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} = M.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dét M = 22 , M est donc inversible ce qui nous permet d'écrire : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}.\begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{22}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{22} \\ \frac{-2}{11} & \frac{5}{22} \end{bmatrix} \quad \text{et finalement} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{22} \\ \frac{-2}{11} & \frac{5}{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Les solutions du système sont : $x = 2$ et $y = 3$

2.2.4 Diagonalisation et vecteurs propres d'une matrice

Si M = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ la matrice diagonalisée de M est D = $\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$

β_1 et β_2 qui sont appelées les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation :

dét[M-β I] = 0 *(avec I la matrice unité).*

Exemple : Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{dét}\left[\text{M - }\beta\text{ I}\right] = \text{dét}\begin{bmatrix} 2 - \beta & 3 \\ 1 & 2 - \beta \end{bmatrix} = (2 - \beta)^2 - 3$

dét[M-β I] = β^2 - 4β + 1= 0 si $\beta = 2 \pm \sqrt{3}$ alors D = $\begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$