Lois Physiques

Chapitre 2
Les fonctions usuelles

G. MALEJACQ

FONCTIONS USUELLES

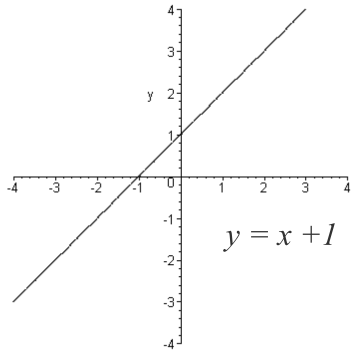
Dans l'écriture $y=f(x)$, y est une fonction de x si à chaque valeur de la variable x appartenant à un certain domaine correspond une valeur de la variable y. Le domaine de définition de la fonction est défini par l'ensemble des valeurs x pour lesquelles la valeur de la fonction y est donnée par la loi $f(x)$.

I- Fonctions polynômes élémentaires

1.1 Fonction polynôme de premier degré.

Une fonction polynôme de premier degré est une fonction dépendant de deux paramètres réels a et b et définie pour tout $x \in$ IR par $f(x) = ax + b$.

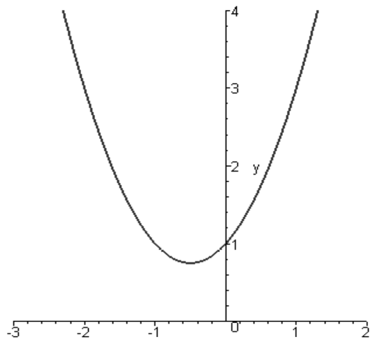
La représentation graphique de cette fonction est une ***droite*** de "pente" a et d'ordonnée à l'origine b.



1.2 Polynôme du second degré.

Un polynôme du second degré est une fonction f dépendant de trois paramètres réels a,b,c et définie par $f(x)=ax^2+bx+c$

Sa représentation graphique est une ***parabole***



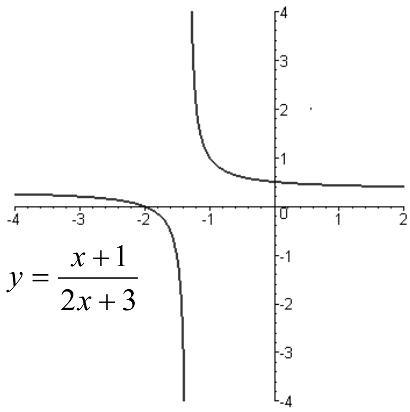
$y = x^2 + x + 1$

1.3 Fonction rationnelle de premier degré

Une fonction rationnelle de premier degré est le quotient de deux fonctions polynômes de premier degré. On l'appelle aussi fonction homographique.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Le graphe d'une fonction homographique est une ***hyperbole***, qui admet pour asymptote les deux droites d'équation $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$



1.4 Fonction irrationnelle

C'est une fonction où apparait des puissances non entières de x ou de fonction de x.

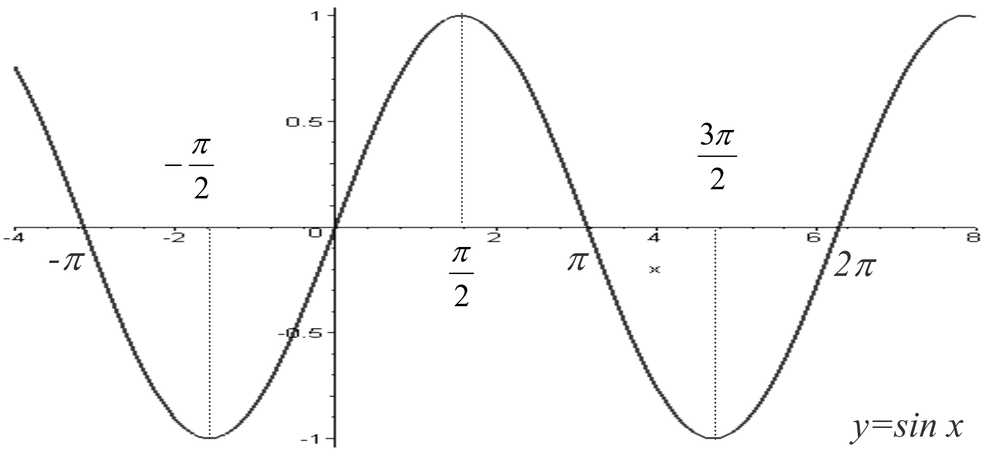
Exemple : $y = \frac{3x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{5+2x^5}}$

Le graphe de ces fonctions n'est caractérisable que par une étude complète de la fonction.

II- Fonctions trigonométriques.

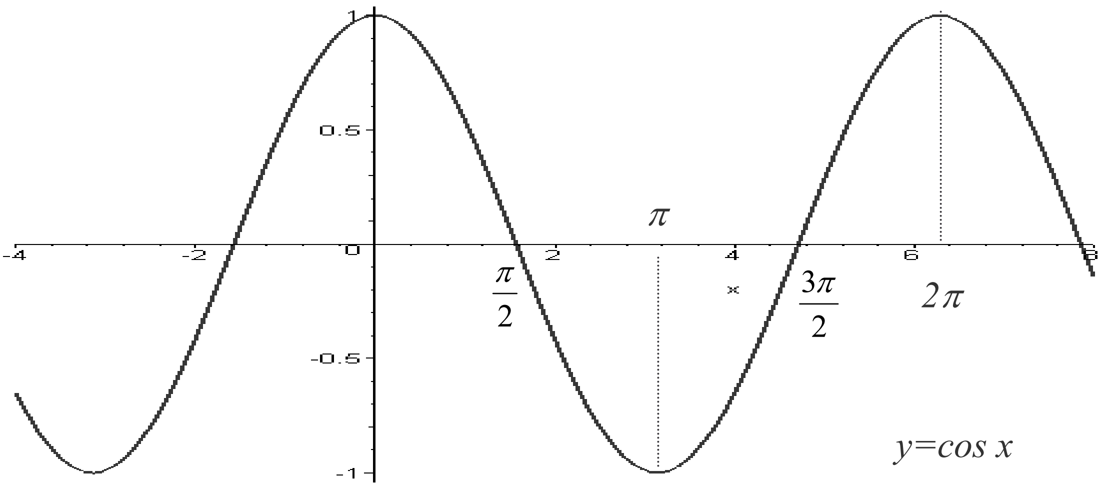
2.1 Fonction sinus

Elle est définie sur IR par $f(x) = \sin x$. Elle est impaire car $f(-x)=-f(x)$ et périodique de période 2π. Elle est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Sa courbe est une sinusoïde.



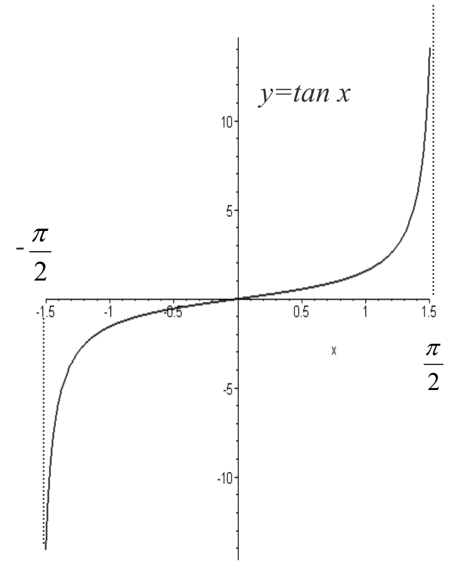
2.2 Fonction cosinus

Elle est définie sur IR par $f(x) = \cos x$. Elle est paire car $f(-x)=f(x)$ et périodique de période 2π. Elle est strictement croissante sur $[-\pi;0]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$. Sa courbe est une sinusoïde.



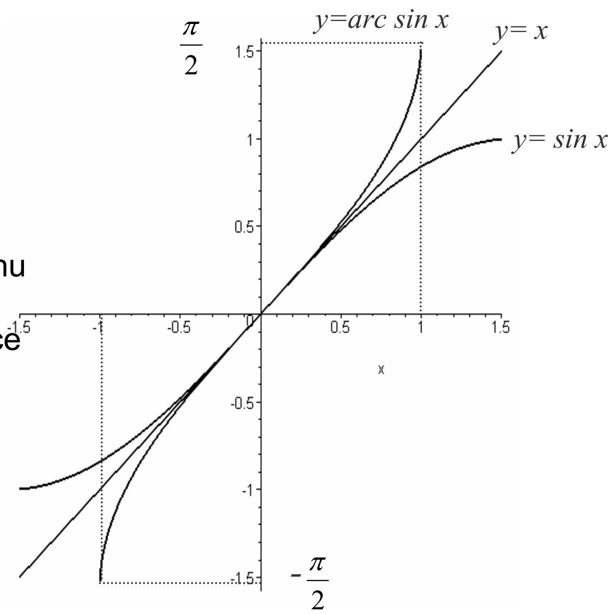
2.3 Fonction tangente

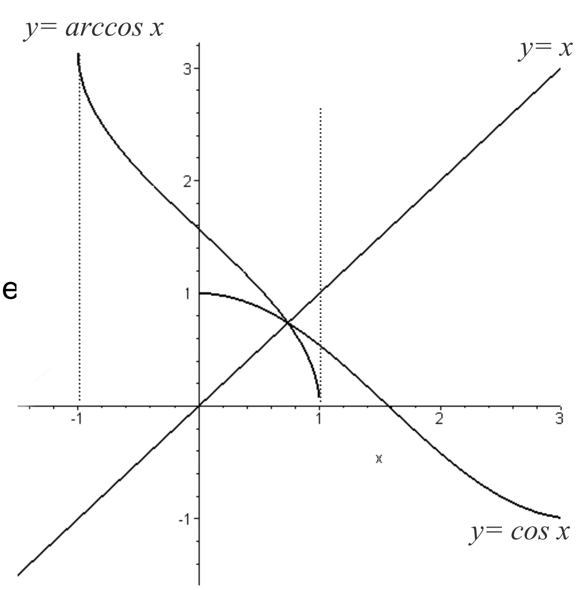
Elle est définie sur IR par $f(x) = tan(x)$. Elle est impaire car $f(-x)=-f(x)$ et périodique de période π. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$



2.4 Fonction arcsinus

Soit la fonction $f(x)= arcsin(x)$ définie continue et impaire sur l'intervalle $[-1;1]$. Son graphe est symétrique de celui de $f(x)=sin(x)$ Il est obtenu par symétrie par rapport à la première bissectrice ($y=x$). Elle est strictement croissante sur $[-1;1]$ avec deux tangentes verticales en 1 et -1.

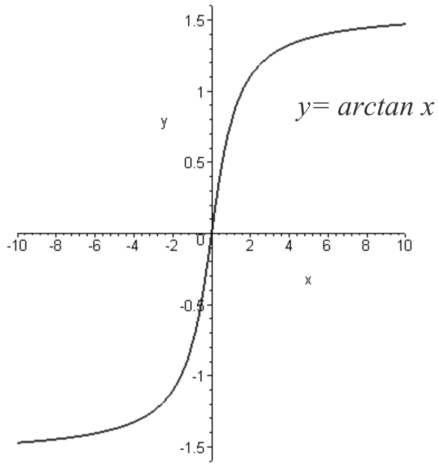




2.5 Fonction arccosinus

Soit la fonction $f(x)= arccos(x)$ définie continue sur l'intervalle $[-1;1]$. Son graphe est le symétrique de celui de $f(x)=cos(x)$ par symétrie par rapport à la première bissectrice. Elle est strictement décroissante sur $[-1;1]$ avec deux tangentes verticales en 1 et -1.

2.6 Fonction arctan



Soit la fonction $f(x)= arctan(x)$ définie continue sur l'intervalle $]-\infty\,;\infty[$. Elle est strictement croissante sur cet intervalle.

III- Fonction Exponentielle et Logarithmique.

3.1 Introduction.

Soit *a* un nombre réel et *n* un nombre entier, on appelle « *exponentielle* de *n* en base *a* » la valeur de *a* puissance *n* soit $a^n = exp\ a(n) = a \times a \times ... \times a$ *(n fois)*

On démontre alors que les exponentielles sont les fonctions réciproques des logarithmes $\log_a$. Ces fonctions se dérivent et s'intègrent de manière très simple, et interviennent dans de nombreuses solutions d'équations différentielles.

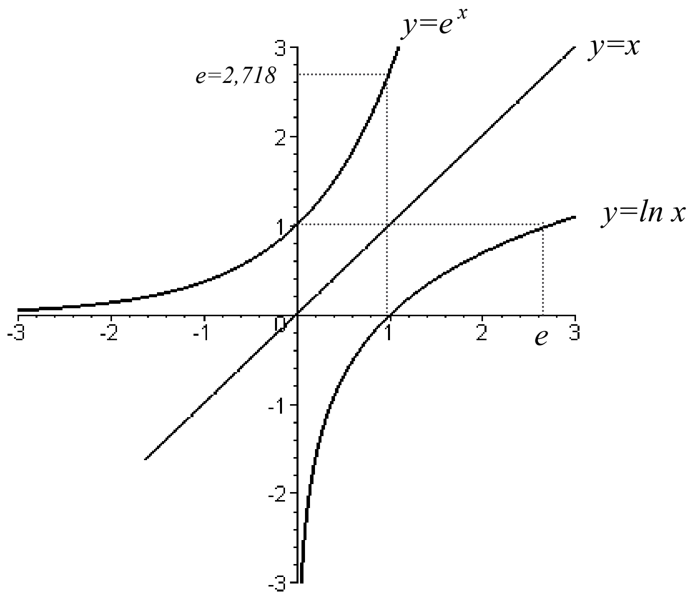
Il existe une base *e* *(e est approximativement égal à 2,718281)* où e^x est la fonction réciproque du logarithme népérien ln.

3.2 La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln. On la note $f(x)=e^x$ ou encore $f(x)=exp(x)$. Elle est définie sur IR et $\forall\ x \in$ IR, $e^x > 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante de IR.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$



3.3 La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, noté *ln*, est la primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ définit de $]0;+\infty[$ et qui s'annule en $x=1$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition.

$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$

3.4 Le logarithme décimal

Le logarithme décimal ou $\log_{10}$ est le logarithme de base dix définit de $]0;+\infty[$ et qui s'annule en $x=1$. Sa fonction est strictement croissante sur son domaine de définition.

Le logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction $f(x)=10^x$: pour $x>0$, si $y = \log_{10}(x)$ alors $x=10^y$.

3.5 Propriétés des fonctions exponentielles et logarithmiques

Les logarithmes de différentes bases sont reliés entre eux par la formule suivante :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

On voit donc que l'utilisation du logarithme naturel suffit généralement à couvrir tous les cas, et que l'utilisation des autres logarithmes se ramène à l'ajout d'une constante multiplicative.

Si $e^x=y$ alors $x=\ln y$ $\quad \ln e^x=x$ $\quad e^{\ln x} = x$

$\ln(a\,b)=\ln a + \ln b$ $\quad \ln\frac{a}{b}=\ln a - \ln b$ $\quad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$ $\quad \ln a^n= n \ln a$

$e^{a+b}= e^a e^b$ $\quad (e^a)^b= e^{a\,b}$ $\quad e^{a-b}= \frac{e^a}{e^b}$ $\quad e^{-b}= \frac{1}{e^b}$

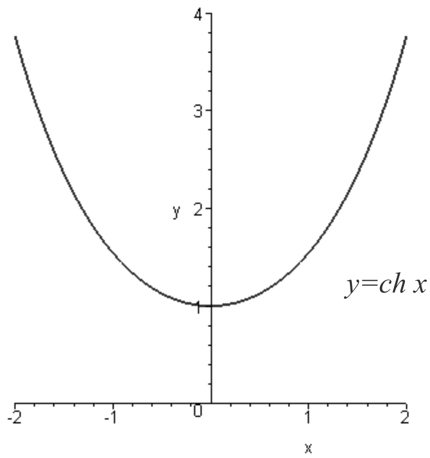
IV- Fonctions Hyperboliques

On démontre que les fonctions trigonométriques peuvent s'exprimer de manière simple avec des exponentielles.

4.1 Fonction cosinus hyperbolique

Par définition la quantité cosinus hyperbolique notée *ch(x)* est $ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Elle est paire (*ch(-x)=ch(x)*), son domaine de définition est IR.

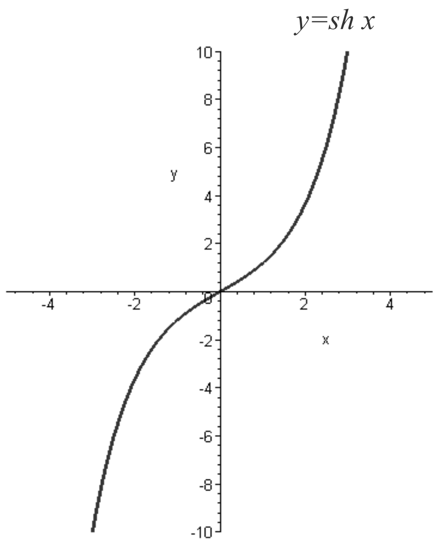
$\lim\limits_{x\to\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$



4.2 Fonction sinus hyperbolique

Par définition la quantité cosinus hyperbolique notée *sh(x)* est $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Elle est impaire (*sh(-x)=-sh(x)*), son domaine de définition est IR.

$\lim\limits_{x\to\infty} sh(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$



Remarque :

On constate que $ch\,x + sh\,x = e^x$ et que $ch\,x - sh\,x = e^{-x}$

On en déduit que $ch^2\,x + sh^2\,x = 1$

V- Formulaire

5.1 Relations fondamentales

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad$ $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\quad$ $1+\text{cotan}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ $\quad$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\quad$ $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$

5.2 Fonctions réciproques et dérivées

$\text{Arcsin}[-1,1] \Rightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $\text{Arcsin}(x)=y \Leftrightarrow \sin(y)=x$

$\text{Arccos}[-1,1] \Rightarrow [0,\pi]$ $\quad$ $\text{Arccos}(x)=y \Leftrightarrow \cos(y)=x$

$\text{Arctan}[\text{Réel}] \Rightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\quad$ $\text{Arctan}(x)=y \Leftrightarrow \tan(y)=x$

5.3 Propriétés des fonctions hyperboliques et dérivées

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$$

5.4 Tableau des valeurs particulières

angle		*sin*	*cos*	*tan*	*cotan*
0	0	0	1	0	/
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

Les angles opposés

sin (- a) = - sin a
cos (- a) = cos a
tan (- a) = - tan a
cotan (- a) = cotan a

Les angles supplémentaires

sin (π - a) = sin a
cos (π - a) = -cos a
tan (π - a) = -tan a
cotan(π - a) = -cotan a

Les angles anti-supplémentaires

sin (π + a) = -sin a
cos (π + a) = -cos a
tan (π + a) = tan a
cotan (π + a) = cotan a

Les angles complémentaires

sin (π/2 - a) = cos a
cos (π/2 - a) = sin a
tan (π/2 - a) = cot a
cotan (π/2 - a) = tan a

Les angles anti-complémentaires

sin (π/2 + a) = cos a
cos (π/2 + a) = sin a
tan (π/2 + a) = -cot a
cotan (π/2 + a) = -tan a

VI- Exercice

6.1 Etude sommaire d'un signal sinusoïdal

La valeur instantanée d'une grandeur sinusoïdale est exprimée par la fonction :

u(t)=Û.*sin*(ω t + φ) avec
- Û l'amplitude maximale (V)
- t la variable temporelle (s)
- ω la pulsation en radian par seconde (rad/s)
- φ La phase à l'origine en radian (rad)

Autres caractéristiques de la grandeur sinusoïdale :

- Sa fréquence f (Hz) qui est liée à la pulsation par la formule $\omega=2\pi f$.
- Sa période T (s) qui est l'inverse de la fréquence ($T=\frac{1}{f}$).
- Sa valeur efficace U est donnée par le rapport $U=\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$.

  Nous nous intéresserons dans un prochain module au calcul de cette valeur.

APPLICATION

Considérons une tension dont les caractéristiques sont :

valeur efficace = 230 V ; fréquence 50 Hz ; phase à l'origine = $\frac{\pi}{3}$

1- Calculer la valeur maximale de la tension. En déduire l'amplitude vue entre les deux extremums (aussi appelée valeur crête à crête).

2- Calculer la valeur de la tension à t=0 puis à t=10 ms.

3- Calculer les instants où le signal à une amplitude maximale et minimale.

4- Donner la représentation graphique de la tension.

6.2 Manipulation de formules exponentielles

Ecrire différemment ou simplifier les fonctions suivantes :

$$f(x)=e^{2x}\,e^{1-2x} \qquad g(x)=\frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}} \qquad h(x)=(e^{x}+e^{-x})^2$$

$$i(x)=e^{-2x}-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} \qquad j(x)=\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2$$