Lois Physiques

Chapitre 4

Analyse fréquentielle

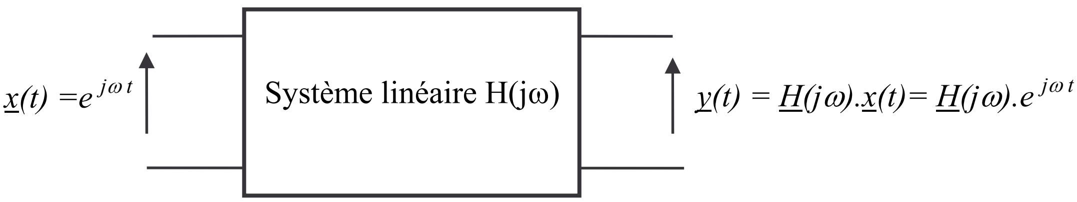
Fonction de transfert complexe

G. MALEJACQ

FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE

1- Notion de fonction de transfert complexe.

La fonction de transfert harmonique (ou transmittance), notée $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{y}(t)}{\underline{x}(t)}$ ou $\underline{H} = \dfrac{\underline{Y}}{\underline{X}}$ est égale au rapport des amplitudes complexes associées à y(t) et x(t). Il est convenu d'exprimer le rapport entre la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée d'un système, ces deux grandeurs devant être de même nature (tension, courant, puissance …). L'expression obtenue caractérise ainsi le comportement de ce système soumis à un régime sinusoïdal permanent.



Pour le cas d'une tension $\underline{V}e$ et $\underline{V}s$ en $\underline{x}(t)$ et $\underline{y}(t)$, on notera $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$

2-Représentation graphique des fonctions de transfert

Les fonctions de transfert sont usuellement représentées de deux façons afin d'étudier le comportement d'un système en fonction de sa fréquence.

2.1. Le diagramme de Bode

Le diagramme de Bode se compose de deux caractéristiques qui donnent séparément l'évolution du gain et de la phase en fonction de la fréquence :

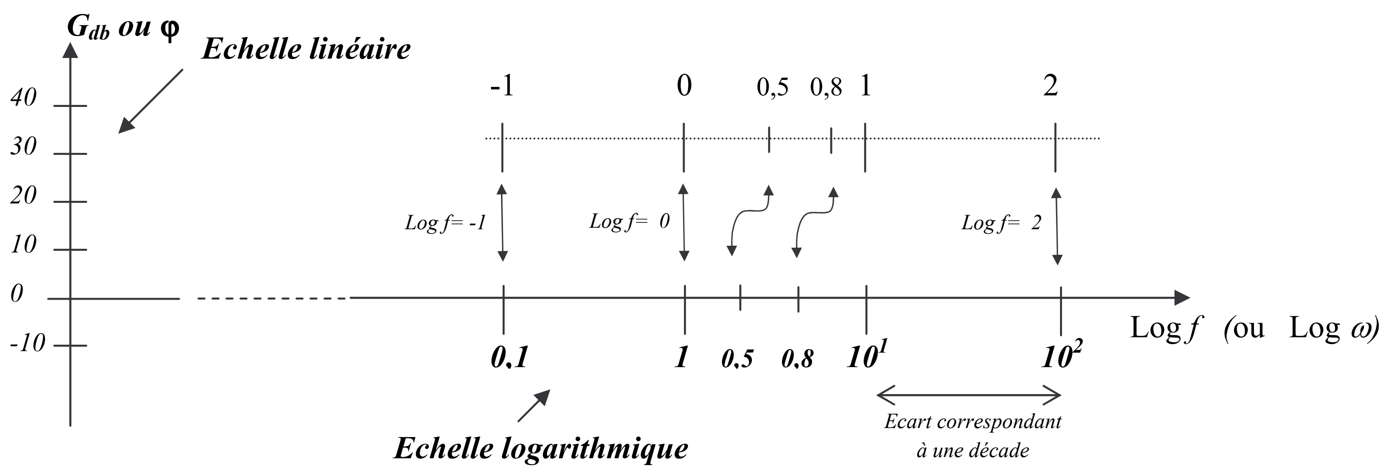
- Le gain de la fonction de transfert est exprimé en décibel tel que :

$\boxed{G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|}$ log : Logarithme décimal

- La phase de la fonction de transfert est exprimée par l'argument de H :

$\boxed{\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{H})}$

La représentation des fréquences (sur l'axe des abscisses) se fera sur une échelle logarithmique plutôt que linéaire. Le repère utilisé dans cette représentation est appelé « semi-logarithmique ». Deux documents sont disponibles (*semilog3dec.pdf* et *semilog5dec.pdf*) dans ce module, vous pourrez les exploiter lors des exercices.



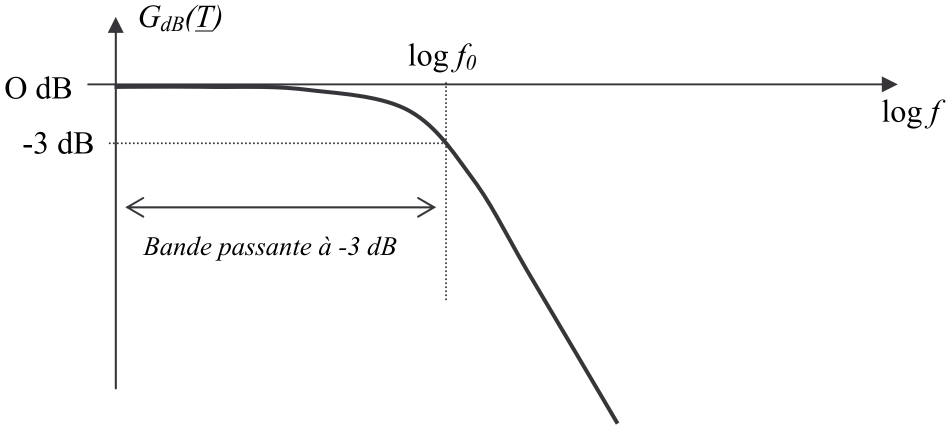
2.1.1. Construction des courbes

En général on décompose la fonction de transfert $\underline{H}$ en produits ou quotients de fonctions simples qui serviront à représenter le comportement asymptotique du diagramme de Bode (gain et phase). Cette décomposition est facilitée compte tenu des propriétés résultant de l'utilisation des logarithmes et des complexes.

2.1.2. Expression de la bande passante à - 3 dB

On exprime par la notion de bande passante, les plages de fréquences particulières pour lesquelles le gain est supérieur au gain maximal - 3 dB. La forme fondamentale d'une fonction de transfert complexe met généralement en évidence les fréquences de coupures définies par une atténuation (ou amplification) dans un rapport de $\sqrt{2}$ de l'amplification maximale ou minimale (On rappelle que 20 log $\sqrt{2}$ = 3,01 dB.)

Exemple. La fonction $\underline{T} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}$ a pour gain $G_{dB} = -20\log\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$. Ce gain reste supérieur à – 3 dB tant que $f < f_0$. La bande passante du circuit caractérisé par cette fonction de transfert est égale à la fréquence de coupure f_0 .



2.1.3 Propriétés

Produit de deux fonctions de transfert

• Le gain d'un produit de deux fonctions de transfert est égal à la somme des gains de chaque fonction de transfert.

• L'argument d'un produit de deux fonctions de transfert est égal à la somme des arguments de chaque fonction de transfert.

Exemples. Soit $\underline{T} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$:

$$G_{dB}(\underline{T}) = 20 \log|\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2| = 20 \log |\underline{H}_1| + 20 \log |\underline{H}_2|$$

$$\mathrm{Arg}(\underline{T}) = \mathrm{Arg}(\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2) = \mathrm{Arg}(\underline{H}_1) + \mathrm{Arg}(\underline{H}_2)$$

Par extension on en déduit ***la puissance d'une fonction de transfert*** :

Soit $\underline{T} = \underline{H}^n$ $\qquad G_{dB}(\underline{T}) = 20 \log|\underline{H}^n| = 20 \log|\underline{H}|^n = n.20 \log|\underline{H}|$

$\qquad \mathrm{Arg}(\underline{T}) = n \,\mathrm{Arg}(\underline{H})$

Cas particulier où une des fonctions est réelle. Soit :

$\underline{H}_2 = A$ (A est réel) $\rightarrow \underline{T} = \underline{H}_1.A$

$G_{dB}(\underline{T}) = 20 \log |\underline{H}_1 .A| = 20 \log |\underline{H}_1| + 20 \log |A|$

$\mathrm{Arg}(\underline{T}) = \mathrm{Arg}(\underline{H}_1 . A) = \mathrm{Arg}(\underline{H}_1) + \mathrm{Arg}(A)$ avec *Arg A = 0 si A >0 et Arg A = π si A<0*

La courbe de gain de $\underline{T}$ a la même allure que celle du gain de $\underline{H}_1$ mais décalée de 20 log|A| en ordonnée. Il en est de même pour la courbe Arg($\underline{T}$) avec un décalage vertical égal à 0 ou π selon le signe de A.

Quotient de deux fonctions de transfert

• Le gain d'un quotient de fonctions de transfert est égal à la différence des gains des fonctions de transfert.

• L'argument d'un quotient de fonctions de transfert est égal à la différence des arguments des fonctions de transfert.

Exemples. Soit $\underline{T} = \dfrac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2}$:

$G_{dB}(\underline{T}) = 20 \log\left|\dfrac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2}\right| = 20 \log \dfrac{|\underline{H}_1|}{|\underline{H}_2|} = 20 \log |\underline{H}_1| - 20 \log |\underline{H}_2|$

$\mathrm{Arg}(\underline{T}) = \mathrm{Arg}(\dfrac{\underline{H}_1}{\underline{H}_2}) = \mathrm{Arg}(\underline{H}_1) - \mathrm{Arg}(\underline{H}_2)$

2.1.4. ***Comportement asymptotique***

Considérons une fonction de transfert d'ordre n : $\underline{T} = \dfrac{1}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^n}$

Le module de cette fonction est donné par $|\underline{T}| = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)^n}$

On détermine son comportement pour les valeurs particulières de ω :

• Si $\omega \rightarrow 0$, $|\underline{T}| \rightarrow 1$ et $G_{dB} \rightarrow 0$ dB

• Si ω → +∞, $|\underline{T}| \to \dfrac{1}{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^n}$ et $G_{dB} \to -20\, n \log\dfrac{\omega}{\omega_0}$

L'argument de cette fonction est défini par $\text{Arg}(\underline{T}) = -n\ \text{Arg}\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

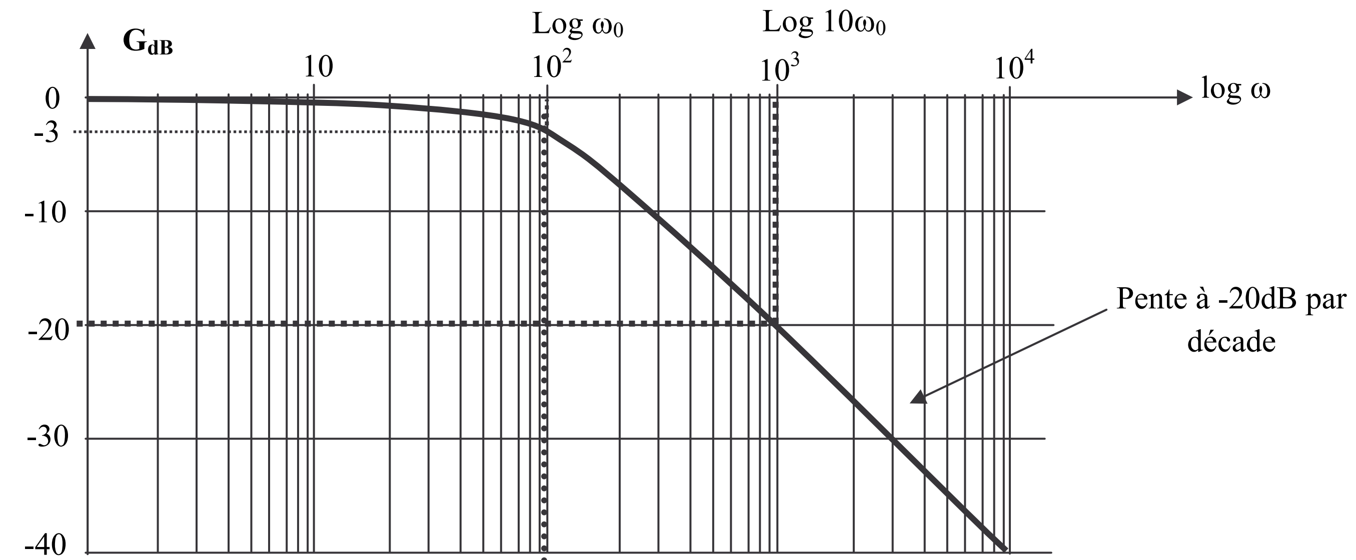
• Si ω→0, $\text{Arg}(\underline{T}) \to 0$

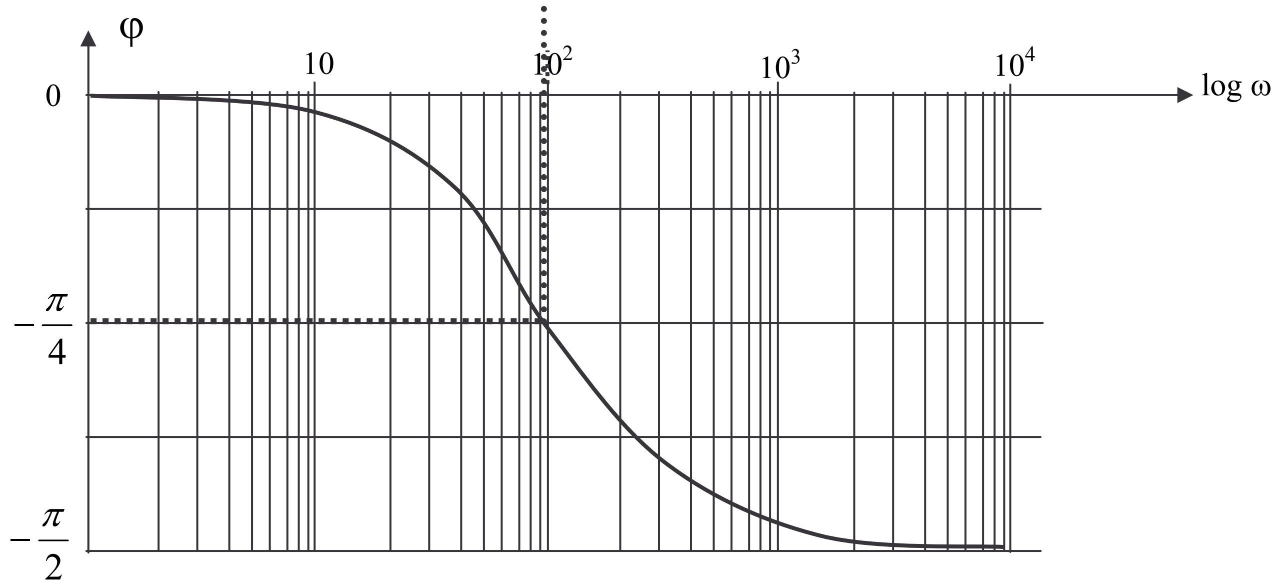
• Si ω → +∞, $\text{Arg}(\underline{T}) \to -n\ \dfrac{\pi}{2}$

Le comportement asymptotique de 20 log$|\underline{T}|$ est donc une droite passant par log ω_0 sur l'axe horizontal et exprimant un gain de (- n 20) dB pour chaque décade de pulsation ω_0.

Exemples : Considérons la fonction d'un filtre passe-bas du premier ordre :

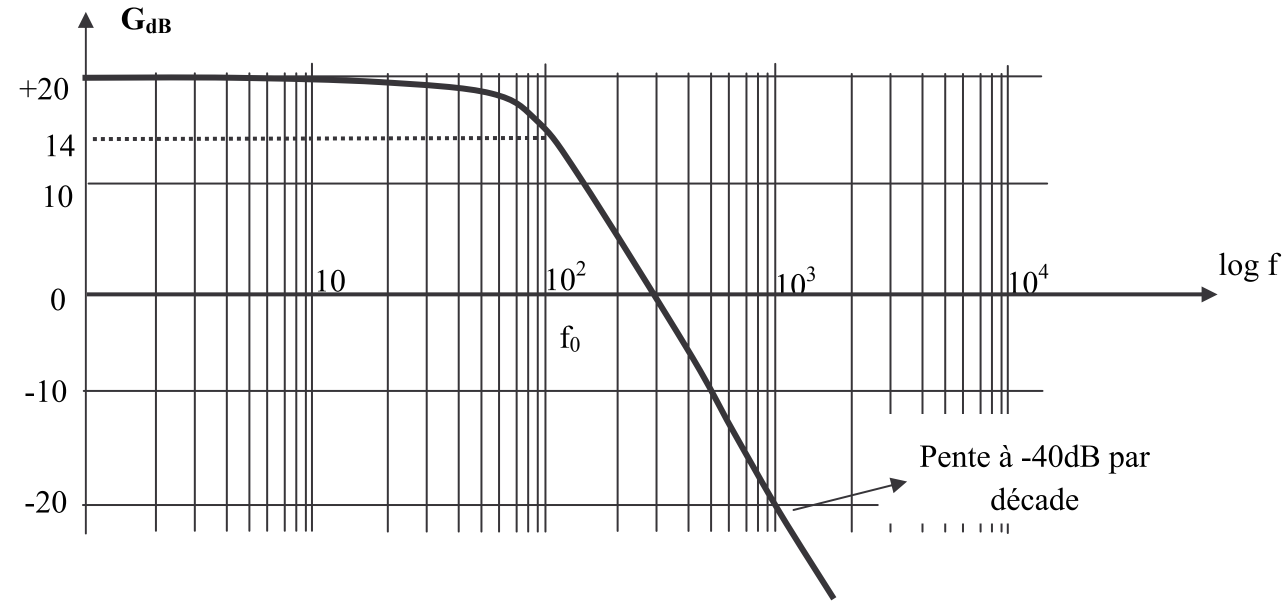
$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \qquad \textit{avec}\ \ \omega_0 = 100\ \text{rd.s}^{-1}$$

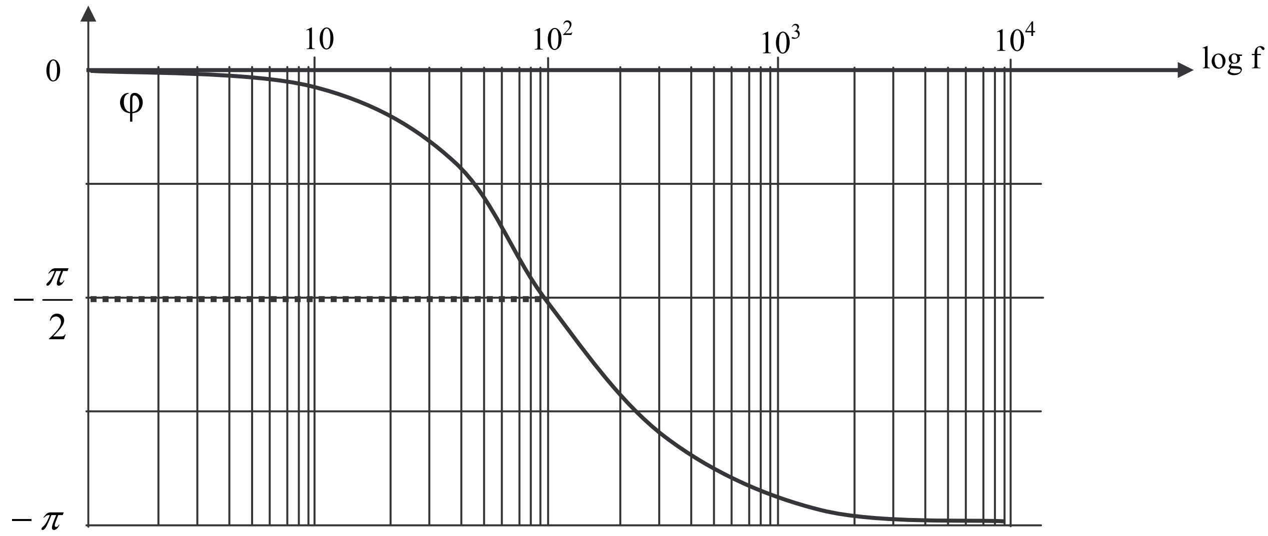




Voyons maintenant la fonction d'un filtre passe-bas actif :

$$\underline{T} = \frac{A}{\left(1 + j\dfrac{f}{f_0}\right)^2} \qquad \text{avec } A = 10 \quad \text{et} \quad f_0 = 100 \text{ Hz}$$





2.2 Le diagramme de Nyquist

le diagramme de Nyquist consiste à représenter en coordonnées polaires sur un système d'axes réels, le module et la phase de la fonction complexe. La courbe obtenue, aussi appelée lieu de transfert où lieu de Nyquist, représente le parcours décrit par l'extrémité du vecteur associé à la fonction complexe ;

Cette représentation présente l'avantage d'associer sur une même courbe le module et la phase d'une fonction complexe. Il est convenu de repérer sur ce lieu les différents points fondamentaux caractérisant le circuit à savoir $f = 0$, $f \rightarrow 0$, $f \rightarrow$ h , $f = f_0$

Exemple : Tracé du lieu de Nyquist d'un filtre passe-bas du premier ordre $\underline{T} = \dfrac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

On exprime une équation cartésienne du lieu recherché en séparant de la fonction la partie imaginaire et réelle, puis en y éliminant l'expression $\dfrac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{T} = \frac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - j\frac{A\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$ en posant $x = \dfrac{A}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ et $y = \dfrac{A\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$, il vient :

$\dfrac{A}{x} = 1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, $y^2 = \dfrac{A^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2}$ puis $y^2 = \dfrac{A^2\left(\dfrac{A}{x}-1\right)}{\left(\dfrac{A}{x}\right)^2}$ On en déduit $y^2 = Ax - x^2$ qui est l'équation permettant de représenter le lieu recherché. Elle est aussi de la forme : $\boxed{\left(x - \dfrac{A}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{A^2}{4}}$

Ce lieu appartient à un demi-cercle de centre $\left(\dfrac{A}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{A}{2}$. On sait que :

Pour $\omega = 0$ → $\varphi = 0$; $x = A$; $y = 0$

Pour $\omega = \omega_0$ → $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$; $x = \dfrac{A}{2}$; $y = -\dfrac{A}{2}$

Pour ω →h → $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$; $x \to 0$; $y \to 0$

On en déduit le tracé suivant :