Lois Physiques

Chapitre 9
Equations Différentielles
Régimes transitoires

G. MALEJACQ

I- Généralités

1.1- Définitions.

Soit t une variable réelle, $t \mapsto y=f(t)$ une fonction. Une équation différentielle est une relation du type $F(t,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$ où $y^{(n)}$ désigne la dérivée énième de y

$$On\ note\ \ y' = \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \quad y^n = \frac{d^ny}{dt^n}$$

L'ordre d'une équation différentielle est le plus fort ordre de dérivation apparaissant dans cette relation.

- $y'-t^3y = t$ est du premier ordre.
- $y'''=48t$ est du troisième ordre.
- $y''-(y')^3 = 0$ est du deuxième ordre.

Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions satisfaisant la relation. Ces fonctions sont les solutions (ou intégrales) de l'équation différentielle.

Exemple :

$y''' = 48t$

on intègre $y'' = 24t^2 + a$ a est une constante d'intégration

puis $y' = 8t^3 + at + b$

$y = 2t^4 + \frac{a}{2}t^2 + bt + c$ a,b et c sont des constantes arbitraires

L'expression $2t^4 + \frac{a}{2}t^2 + bt + c$ donne toutes les solutions de l'équation différentielle.
Elle est appelée **solution générale de l'équation**

Des **solutions particulières** sont par exemple : $y_1 = 2t^4, \quad y_2 = 2t^4 + 3t^2 + 1$ ...

1.2 – Equations à variables séparées ou séparables

Ce sont, en général, des équations du premier ordre F$(t,y,y')=0$ où y est considérée comme une variable au même titre que t.

Elles se ramènent à la forme : $g(y)\,dy=f(t)dt$

Pour l'intégrer, on calcule l'intégrale de chaque membre et on obtient : $G(y) = F(t) + C$ *(C : constante)*

Exemple :

$(1+t^2)y' + 3ty = 0$ comme $y' = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{-3t}{1+t^2}dt$ en intégrant membre à membre

sachant que $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$ et $\displaystyle\int \frac{-3t}{1+t^2} = -\frac{3}{2}\int \frac{2t}{1+t^2} = -\frac{3}{2}\ln(1+t^2)$

$ln|y| = -\dfrac{3}{2}ln(1+t^2) + \mathrm{C}$ qui donne $y = \dfrac{K}{(1+t^2)^{3/2}}$ avec K un réel

1.3 – Equations différentielles linéaires

Il s'agit d'équations de la forme :

$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ (qui est une équation complète)

Les fonctions *a(t), b(t)* et *c(t)* sont données, l'équation sans second membre associée est :

$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$

Théorème :

La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète:

On note: **EGS = ESSM + SPEC**
- ***EGS*** : Solution générale de l'équation complète.
- ***ESSM*** : Solution générale de l'équation sans second membre.
- ***SPEC*** : Solution particulière de l'équation complète.

1.3.1 - Equations linéaires du premier ordre

Considérons l'équation *a(t) y'+b(t)y=c(t)*

L'équation sans second membre est *a(t) y'+b(t)y=0* , elle est à variables séparable

De $a(t)y'+b(t)y=0$ on pose $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{b(t)}{a(t)}dt$

puis $ln|y| = -\displaystyle\int \frac{b(t)}{a(t)}dt + cste$ puis en intégrant membre à membre on découvre

la solution générale de l'équation sans second membre est : $Y = ke^{-\int \frac{a(t)}{b(t)}.dt}$

La recherche d'une solution particulière de l'équation complète peut se faire par identification.

Exemple de recherche d'une solution particulière sous la forme d'un polynôme :

Soit l'équation $2xy' + y = x^2$

- Sans second membre :

$$2xy' + y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2x}dx$$

$$ln|y| = -\frac{1}{2}ln|x| + cste$$

$$ln|y| = ln\frac{1}{\sqrt{|x|}} + cste$$

$$Y = \frac{k}{\sqrt{|x|}}$$

- Recherche d'un polynôme y_0 solution particulière de l'équation complète.

Soit $y_0 = ax^2 + bx + c$

$y_0' = 2ax + b$

Qui dans notre équation donne :

$$2xy_0' + y_0 = 5ax^2 + 3bx + c = x^2$$

D'où $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

En définitive $y_0 = \frac{1}{5}x^2$

- La solution générale de l'équation différentielle est alors : $y = \frac{k}{\sqrt{|x|}} + \frac{1}{5}x^2$ $(k \in R)$

1.3.2-Equations linéaires du second ordre à coefficients réels constants

Soit une équation différentielle de la forme $a\dfrac{d^2y}{dt^2}+b\dfrac{dy}{dt}+cy=f(t)$ (ou $ay''+by'+cy=f(t)$)

Dans laquelle a, b et c sont des constantes réelles, y une fonction à déterminer et *f* une autre fonction.

- Résolution de l'équation sans second membre.

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

Soit *r* un réel, l'équation $ar^2+br+c=0$ est appelée l'équation caractéristique associée à l'équation sans second membre. Nous distinguons trois cas de résolutions :

C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

1^er^ cas : $\Delta = b^2-4ac > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes $r_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est : $\boxed{Y(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}}$

2^e^ cas : $\Delta = b^2-4ac = 0$, il y a une solutions réelle double $r=-\dfrac{b}{2a}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est : $\boxed{Y(t)=(C_1+C_2t)e^{-rt}}$

3^e^ cas : $\Delta = b^2-4ac < 0$, Il y a deux solutions complexes conjuguées $r_1=\alpha+j\beta$ et $r_2=\alpha-j\beta$ avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

La solution générale de l'équation sans second membre est $\boxed{Y(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)}$

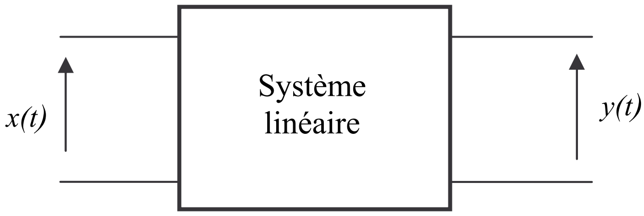
- Résolution de l'équation avec second membre.

En connaissant une solution particulière y_0 alors la solution générale de l'équation est $Y(t) + y_0$

II- Application à l'électricité.

2.1 Recherche des équations différentielles

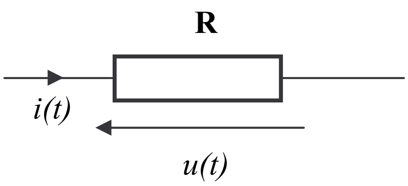
L'état électrique d'un système est caractérisé par des équations différentielles linéaires dont les coefficients représentent les composants mêmes du circuit (résistances, condensateurs, constantes d'amplification …). Dans le cas d'un système linéaire ces coefficients sont constants car indépendants de l'état électrique présent.



$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 y(t)$$

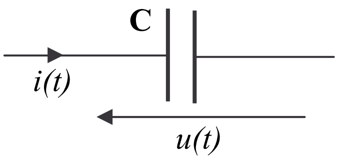
Pour retrouver les équations différentielles régissant un circuit, on introduit les lois élémentaires de l'électricité (loi des mailles et lois des nœuds). On rappelle ci-dessous les relations utilisées pour les composants usuels :

Cas de l'élément résistif.



$$\boxed{u(t) = R \,.\, i(t)}$$

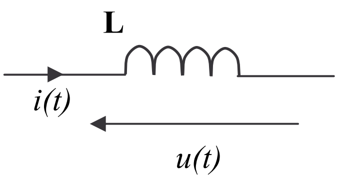
Cas du condensateur.



$$\boxed{i(t) = C \frac{du(t)}{dt}}$$

Il ne peut pas y avoir de discontinuité de la tension u

Cas de la self inductance.

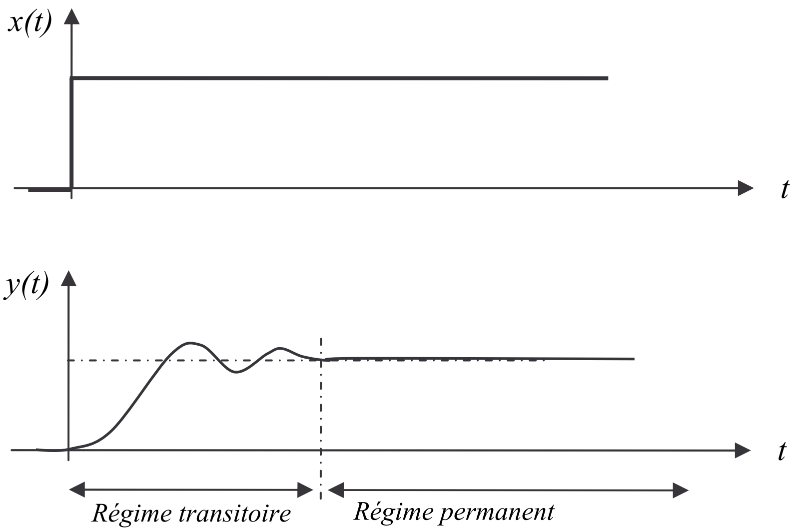


$$\boxed{u(t) = L \frac{di(t)}{dt}}$$

Il ne peut pas y avoir de discontinuité de l'intensité i

2.2 Comportement dynamique d'un système linéaire

La réponse d'un système face à une excitation présente une phase transitoire puis une phase d'équilibre où le signal de sortie aura la même physionomie que le signal d'entrée. Lorsque la phase d'équilibre est atteinte on parle alors de régime permanent. Ces deux phases correspondent respectivement aux ***deux composantes des solutions de l'équation différentielle***.

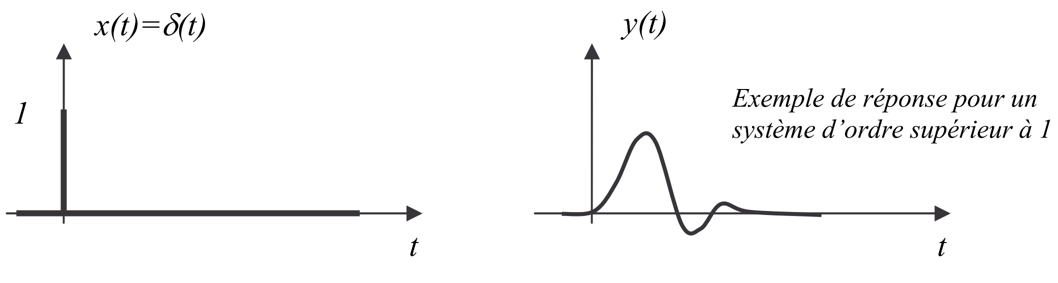


2.3 Caractéristiques usuelles des excitations

Un signal d'entrée servant à tester ou à modéliser un système est appelé une excitation alors que le signal de sortie correspondant sera nommé la réponse à cette excitation.

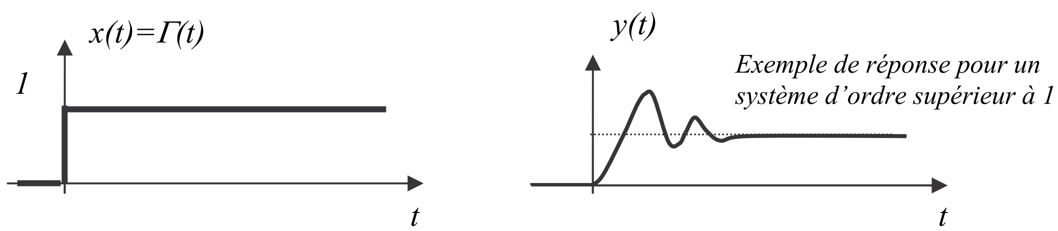
2.3.1 La réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système s'obtient en appliquant à son entrée une impulsion dite de « Dirac ». Cette impulsion a en théorie une durée de vie infiniment courte et une amplitude unitaire.



2.3.2 La réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système est celle obtenue par une excitation de type échelon unitaire.

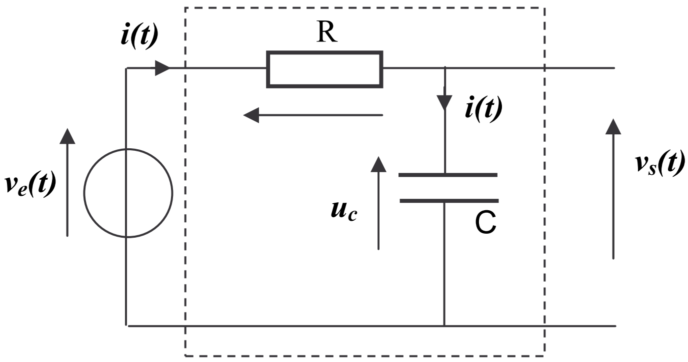


2.3.3 La réponse harmonique

La réponse harmonique s'obtient en appliquant un signal sinusoïdal à l'entrée du système. Les équations différentielles sont peu employées pour ce régime qui valorisera plutôt l'outil des "nombres complexes".

2.4 Exemple d'analyse

Réponse indicielle et impulsionnelle d'un système du premier ordre. Cas d'une cellule RC.



a) Recherche de l'équation différentielle

En utilisant la loi des mailles il vient :

$v_e(t) = Ri(t) + u_c(t)$

$Avec\ \ v_s(t) = u_c(t)$ nous avons $i(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt} = C\dfrac{dv_s(t)}{dt}$

Comme $i(t) = \dfrac{v_e(t) - v_s(t)}{R}$

On en déduit $\boxed{RC\dfrac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)}$

On l'étudie initialement sans son second membre : $RC\dfrac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = 0$

$RC\dfrac{dv_s(t)}{dt} = -v_s(t)$ Soit par séparation de variable: $\dfrac{dv_s(t)}{v_s(t)} = -\dfrac{1}{RC}dt$

qui en intégrant membre à membre devient: $\ln|v_s(t)| = -\dfrac{1}{RC}t + C^{te}$

En définitive: $v_s(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$
(C'est la solution de l'équation sans second membre ESSM)

b) Réponse indicielle de la cellule.

Recherche d'une solution particulière de l'équation complète (SPEC)

Considération : Le signal constant imposé en $v_e(t)$ va certainement engendrer un régime permanent continu en v_s. Ainsi lorsque $t \to +\infty$ avec $v_s(t)$ supposé constant, l'équation $RC\dfrac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)$ exprime une égalité qui nous intéresse : $v_s(t) = v_e(t)$ *(car $v'_s=0$ si v_s est constant).*

Il s'ensuit qu'une solution particulière de la solution de l'équation complète est alors :

$$\boxed{\text{SPEC} \rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} v_s(t) = v_e(t) = 1}$$

Ce qui conduit à la forme de la solution générale de l'équation complète : EGS = ESSM+SPEC

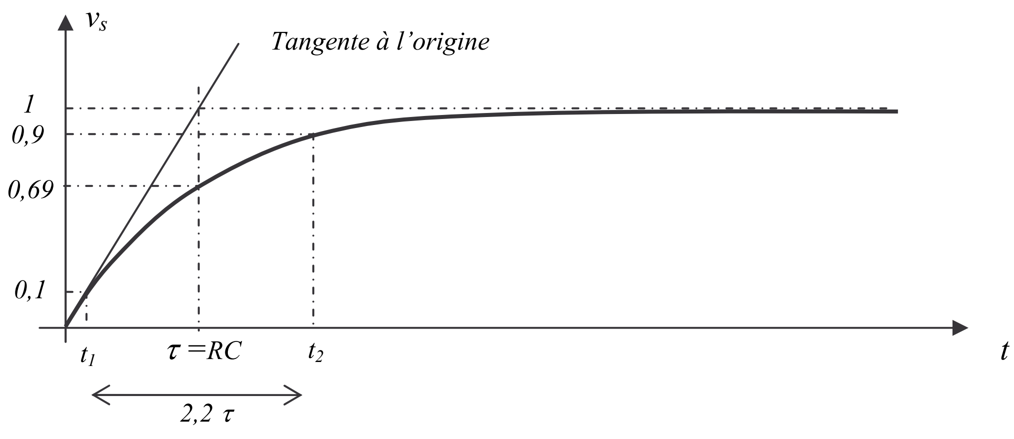
$$\boxed{\text{EGS} \rightarrow \quad v_s(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + 1}$$

On peut maintenant déterminer la constante d'intégration K. Le condensateur impose une continuité de la tension. Ainsi pour $t=0^+$ on a $v_s(t)=0$. En utilisant ce résultat dans la solution générale de l'équation complète on en déduit que K= - 1

La solution générale de l'équation avec second membre est :

$$\boxed{\text{EGS} \rightarrow \quad v_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Allure de la réponse :



Remarque : le produit RC est appelé « constante de temps du système » il est exprimé en seconde. Il définit la dérivée à l'origine de la courbe représentative de $v_s(t)$. On pose souvent $\tau = RC$

On introduit le temps de montée à 10 % qui est par définition le temps mis par le signal pour évoluer de 10% à 90 % de sa valeur finale. Ici $t_m = t_2 - t_1 = RC \ln 0,9 - RC \ln 0,1 = RC \ln 9 = 2,2\, RC$

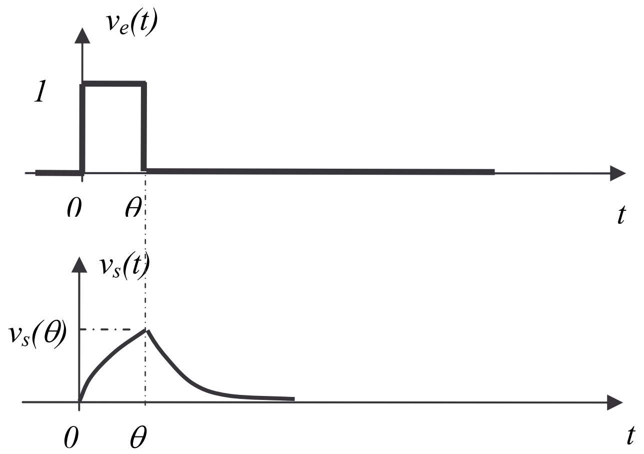
c) Réponse impulsionnelle de la cellule.

On est obligé de donner une signification physique au signal de Dirac en considérant ici l'impulsion d'une durée θ. L'analyse de la réponse est réalisée en deux temps :

• Pour $0 < t < \theta$

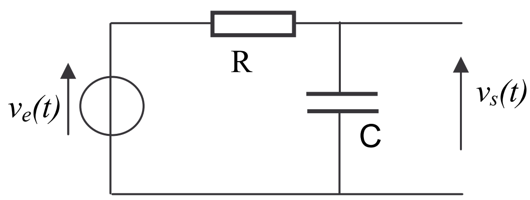
le condensateur se charge comme précédemment, on en déduit : $v_s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$

• Pour $\theta < t < \infty$
le condensateur se décharge, la solution particulière de l'équation complète est égale à 0, on en déduit la fonction suivante : $v_s(t) = v_s(\theta)e^{-\frac{t-\theta}{RC}}$



2.5- Equivalence entre l'écriture complexe et l'écriture temporelle.

Considérons l'exemple d'une cellule RC.



• En utilisant la notation complexe il vient : $\underline{V}_s = \dfrac{\underline{V}_e \dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}}$ soit $\underline{V}_e = \underline{V}_s jRC\omega + \underline{V}_s$

• L'équation temporelle donne : $v_e(t) = RC\dfrac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$

L'analogie est évidente :

Multiplier une variable par « jω » revient à la dériver par le temps : $x\ j\omega \leftrightarrow \dfrac{ds}{dt}$
Diviser une variable par « jω » revient à l'intégrer par le temps : $\dfrac{x}{j\omega} \leftrightarrow \int x\,dt$

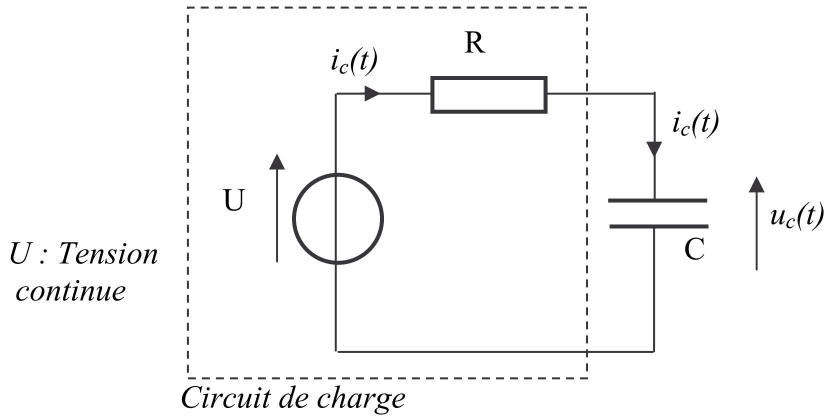
Des transcriptions sont donc possibles entre les deux écritures.

2.6- Analyse des régimes transitoires.

Nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre la méthode mathématique conventionnelle de résolution de problèmes électriques liés au régime quelconque imposé aux circuits.
Dans une grande majorité des cas, il s'agit d'étudier l'évolution temporelle de systèmes du premier ordre sollicités par des évolutions brutales de tensions ou de courants continus. Je vous propose ici une méthode plus directe d'élaboration des fonctions temporelles pour ces événements.

2.6.1 Cas du condensateur.

En isolant les éléments du circuit polarisant un condensateur nous identifierons directement ou grâce à un modèle de Thévenin le circuit élémentaire suivant :



L'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur peut être retrouvée sans la résolution d'une équation différentielle, grâce à la formule suivante :

$$\boxed{u_c(t) = (V_I - V_F)\, e^{\frac{-t}{\tau}} + V_F \quad \textit{ou encore} \quad t = \tau \ln\left(\frac{V_I - V_F}{U_C - V_F}\right)}$$

En appelant : ***ln*** *logarithme népérien*

- $\boldsymbol{\tau}$: La constante de temps du circuit (τ = RC).
- $\boldsymbol{V_I}$: La tension initiale aux bornes de C (avant l'évolution).
- $\boldsymbol{V_F}$: La tension aux bornes de C s'il se chargeait durant un temps infini ($t \gg \tau$).
- $\boldsymbol{U_C}$: La valeur de la tension aux bornes du condensateur à l'instant recherché.

Application :

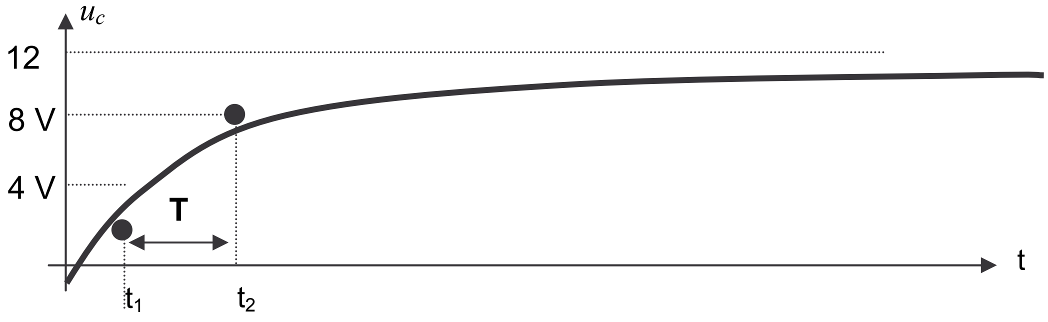
Considérons U=12 V, R= 100 kΩ C= 22 µF et le condensateur initialement déchargé *($u_c(0)=0$).*

-La fonction caractérisant la charge est retrouvée en posant : $\tau = RC = 2{,}2\ s$; $Vi = 0\ V$; $V_F = U = 12\ V$

On écrit directement : $\boxed{u_c(t) = (V_I - V_F)\, e^{\frac{-t}{\tau}} + V_F = 12\left(1 - e^{\frac{-t}{2,2}}\right)}$

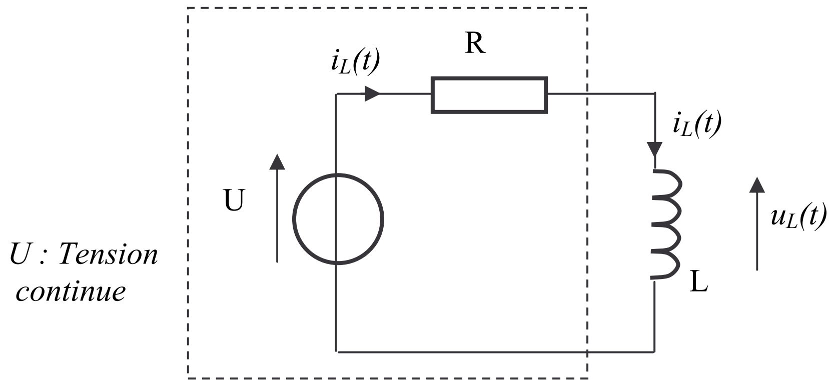
-Le calcul du temps mis par le condensateur pour se charger de 4 à 8 V est donné par :

Avec $\tau = RC = 2{,}2\ s$; $V_i = 4\ V$; $V_F = U = 12\ V$; $U_c = 8\ V$ $\rightarrow$ $\boxed{T = t_2 - t_1 = 2{,}2 \ln\left(\dfrac{4\text{-}12}{8\text{-}12}\right) = 2{,}2 \ln 2 = 1{,}5\ s}$



2.6.2 Cas d'une inductance.

La même approche que précédemment sera faite. Si les éléments du circuit polarisant une inductance peuvent être modélisés par le schéma élémentaire suivant alors :



Circuit de charge

L'évolution temporelle du courant circulant dans l'inductance peut être directement exprimée grâce à la formule :

$$\boxed{i_L(t) = (I_I - I_F)\, e^{\frac{-t}{\tau}} + I_F \quad \text{ou encore} \quad t = \tau \ln\left(\frac{I_I - I_F}{I_C - I_F}\right)}$$

ln *logarithme népérien*

En appelant :

- $\boldsymbol{\tau}$: La constante de temps du circuit ($\tau = L/R$).
- $\boldsymbol{I_I}$: La valeur initiale du courant traversant L (avant l'évolution).
- $\boldsymbol{I_F}$: La valeur finale du courant traversant L (après un temps $t \gg \tau$).
- $\boldsymbol{I_L}$: La valeur du courant à l'instant recherché.