Lois Physiques

Chapitre 5
Dérivation et Différentielle

G. MALEJACQ

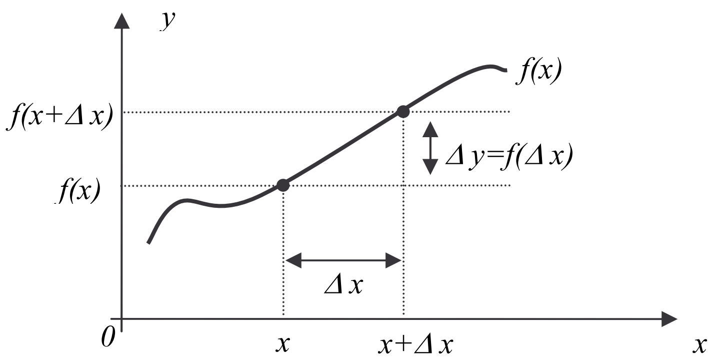
DERIVATION et DIFFERENTIELLE

I - Dérivabilité

1- Définition

Soit $f(x)$ définie sur IR ou sur un intervalle de IR. La dérivée de f en un point x de son domaine de définition, notée $f'(x)$ est définie par :

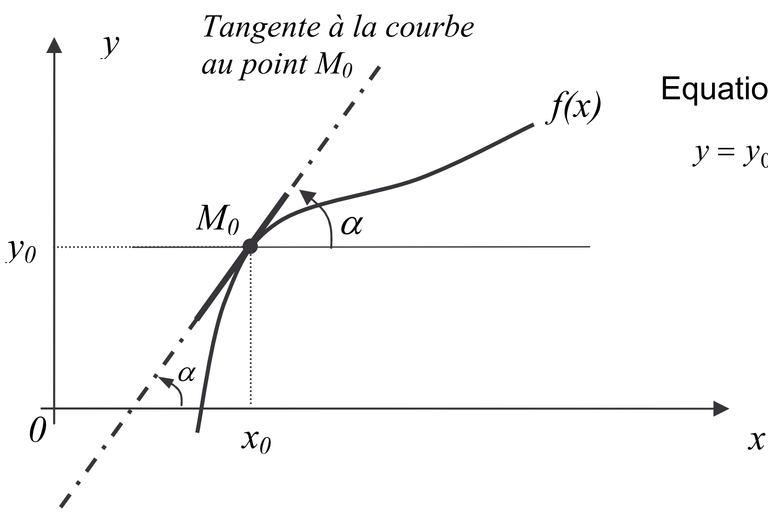
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$$



La fonction est dérivable sur son domaine de définition si elle l'est en tout point de ce domaine.

2- Interprétation géométrique

La pente de la tangente à la courbe $y=f(x)$ au point M_0 d'abscisse x_0 est donnée par la dérivée $f'(x_0)=\tan\alpha$



Equation de la tangente :

$$y = y_0 + (x - x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$$

Cas particulier :

$f'(x)= 0 \Rightarrow \alpha = 0$, la tangente est horizontale par rapport à l'axe $0\,x$.

$f'(x)= \pm\infty \Rightarrow \alpha = \pm\pi/2$, la tangente est verticale par rapport à l'axe $0\,y$.

3- Utilisation du signe de la dérivée, étude des variations

3.1 Théorème

Soit $f(x)$ une fonction dérivable sur son domaine de définition D.

Si $f'(x)$ est nulle sur D alors $f(x)$ est constante sur D.
Si $f'(x)$ est positive sur D alors $f(x)$ est croissante sur D.
Si $f'(x)$ est négative sur D alors $f(x)$ est décroissante sur D.

3.2 Localisation des extremums d'une fonction

$f'(x_0)$ et $f'(x_1)$ s'annulent entre deux signes différents de $f'(x)$
→ M_0 et M_1 sont sur des extremums.

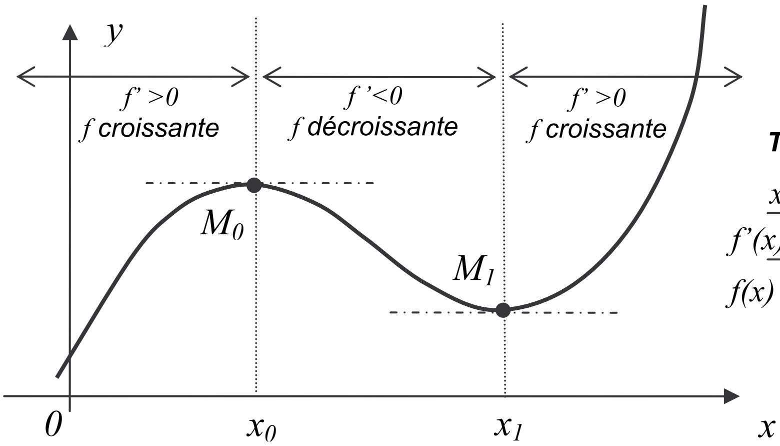


Tableau de variation

x	0		x_0		x_1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	M_0	$\searrow$	M_1	$\nearrow$

4 - Propriétés générales

4.1 Tableau des dérivées usuelles

y = f (x)	y' = f '(x)
x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x
$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a \quad (a > 0)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\text{cotan}\, x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2 x$

y = f (x)	y' = f '(x)
$\text{Arc}\sin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arc}\cos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arc}\tan x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\text{Arc cotan}\, x$	$-\dfrac{1}{1-x^2}$
$\text{sh}\, x$	$\text{ch}\, x$
$\text{ch}\, x$	$\text{sh}\, x$
$\text{th}\, x$	$\dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$

4.2 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)+g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \qquad \text{ou encore} \quad (f+g)' = f' + g'$$

Exemple :

Soit la dérivée de $y(x) = \sin 2x + 3x^2 + e^{-2x}$. La fonction étant de la forme $y = u + v + w$, nous aurons pour la fonction dérivée : $y'(x) = u' + v' + w' = \mathbf{2\cos 2x + 6x - 2e^{-2x}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \qquad \text{ou encore} \quad (f\,g)' = f'g + f\,g'$$

Exemple :

Soit la dérivée de $y(x) = x^3 \cos^2 x$. La fonction étant de la forme $y = u\,v$, nous aurons pour la fonction dérivée : $y'(x) = u'\,v + u\,v'$ soit :

$y'(x) = (x^3)' \cos^2 x + x^3 (\cos^2 x)'$
$y'(x) = 3x^2 \cos^2 x + x^3 (2) \cos x\,(-\sin x)$ d'où $y'(x) = 3x^2 \cos^2 x - 2x^3 \sin x \cos x$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{ou encore} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

Exemple :

Soit la dérivée de $y(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. La fonction étant de la forme $y = \dfrac{u}{v}$, nous aurons pour la fonction dérivée : $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ soit $y' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4.3 Dérivée d'une fonction composée

Si les fonctions f et u sont des fonctions dérivables, la fonction composée $F(x) = f[u(x)] = (f \circ u)(x)$ admet pour fonction dérivée :

$\mathbf{F'(x) = f'(u) \cdot u'_x}$ avec
- $f'(u)$: fonction dérivée de $f(u)$ par rapport à u.
- $u'(x)$: fonction dérivée de $u(x)$ par rapport à x.

Exemple :
Soit la dérivée de $\mathbf{y(x) = \cos(6x^2 + 5)}$ La fonction est de la forme $F(x) = f[u(x)]$ avec $u(x) = 6x^2 + 5$, et $f(x)$ la fonction $\cos(x)$. Nous avons donc $u'(x)=12x$, $f'(x)=-\sin(x)$ d'où la fonction dérivée $\mathbf{y'(x) = -12x \sin(6x^2 + 5)}$

Autre exemple : Soit $\mathbf{y(x) = \ln(6x^2 + 5x)}$, *on trouve de la même façon* $y' = \dfrac{12x+5}{6x^2+5x}$

4.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Si f est continue, strictement monotone sur un intervalle I (si $f'(x)\neq 0\ \Delta\ x \in$ I), alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et admet pour fonction dérivée :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Pour une variable x, on posera pour la dérivée de la fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Exemple : Cas de la fonction *Arcsin(x)* .

Soit $f(x)=\sin(x)$ et $(f(x))^{-1} = Arc\sin(x)$ sur le domaine de définition $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x)=\cos(x)$, donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\cos[Arc\sin(x)]} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(Arc\sin(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.5 Dérivées d'ordre supérieur

La définition de la dérivée peut être appliquée à $f'(x)$ pour donner ce qui sera appelée la dérivée seconde de $f(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x} f(x) = f''(x)$$

En réitérant ce processus nous obtenons successivement $f'', f''', f^4, \ldots, f^{\mathrm{n}} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$

Formule de Liebniz

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(f(x)g(x)\big) = \big(f(x)g(x)\big)^n = f^n(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \ldots + f(x)g^n(x)$$

$$\text{ou encore} \quad (f.g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}.g^k \qquad \text{rappel : } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

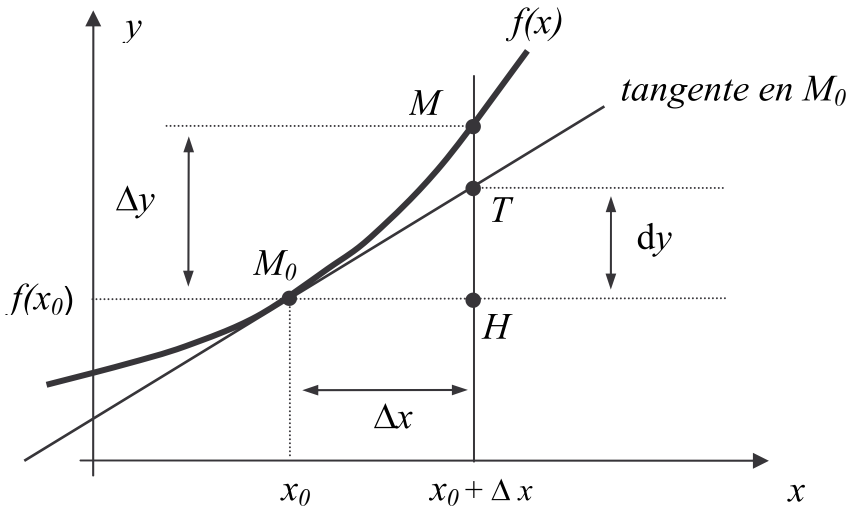
II – Différentielle

1- Définition

Soit f définie par son domaine de définition D, dérivable en x_0 sur D. Soit $\Delta x = x - x_0$ On appelle différentielle de f en x_0 la fonction définie par :

$\Delta y \rightarrow f'(x_0).\Delta x$ on la notera $d\,f(x) = f'(x).\Delta x$ ou plus fréquemment $\boxed{d\,f = f'(x).dx}$

Explication géométrique



Soit (M_0T) la tangente en x_0 à la courbe représentative de f. La tangente en ce point est donc :

$f'(x_0) = \dfrac{\overline{HT}}{\overline{M_0H}}$ ou encore $\overline{HT} = f'(x).\overline{M_0H} = f'(x)dx = dy$

On remarque facilement que $\Delta y \neq \mathrm{d}\,y$ (il est négligé ici le segment $\overline{\mathrm{MT}}$). On pourra cependant assimiler $\Delta\, y$ *à* $\mathrm{d}\,y$ pour de très faibles variations Δx.

2- Opération sur les différentielles.

En utilisant les opérations sur les dérivées on montre que

$$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}(f.g) = g.\mathrm{d}f + f.\mathrm{d}g$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.\mathrm{d}f - f.\mathrm{d}g}{g^2}$$

3- Différentielle d'une fonction composée.

Soit $y=f(x)$. On suppose que x soit une fonction de $t : x=u(t)$. On a donc :

$$y=f(x)=f[u(t)]=h(t)$$

Ainsi $\mathrm{d}h=h'(t)\mathrm{d}t=f'(u).u'(t)\mathrm{d}t=f'(x).\mathrm{d}x=\mathrm{d}f$

D'où $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=h'(t)\mathrm{d}t$

On en déduit que la différentielle est indépendante de la variable choisie.

4- Applications

Considérons un générateur électrique de fem $E=50$ V et de résistance interne r = 5 Ω alimentant une résistance R= 20 Ω. On envisage une variation de la résistance R de 0,5 Ω (soit ΔR = 0,5 Ω).

-Le calcul de la variation de l'intensité du courant dans le circuit est :

$$I=\frac{E}{R+r} \quad \text{d'où } \mathrm{d}I=-\frac{E}{(R+r)^2}dR \ \text{ ce qui donne } \Delta I=-\frac{E}{(R+r)^2}\Delta R=-\frac{50}{25^2}0,5=-0,04 \text{ A}$$

Le signe négatif de ce résultat indique que les variations sont opposées.

-Le calcul de la variation de la tension aux bornes de la résistance est :

$\mathrm{V}_R = RI$ d'où $\mathrm{d}V_R = R\mathrm{d}I+I\mathrm{d}R$ ce qui donne : $\Delta_R = R\Delta I+I\Delta R =20(-0,04)+2(0,5)=0,2\ V$

-Le calcul de la variation de puissance dissipée dans R est :

$P_R = R\ I^2$ d'où $\mathrm{d}P_R = I^2\mathrm{d}R+R2I\mathrm{d}I =-1,2$ W

III– Exercices

Exercice 1

1- Donner la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5(x^2 - 6x + 2)$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 1}{5}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + x + 1}$ f) $f(x) = (3x+2)\cos x$

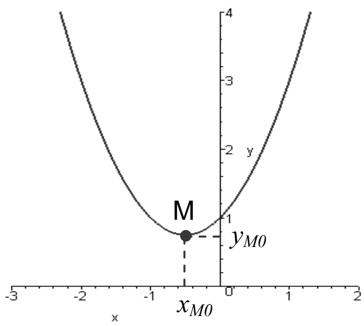
g) $f(x) = x^2 \sin x$ h) $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$

2- Justifier, comme cela a été fait pour la fonction $Arcsin(x)$, la dérivée de la fonction $Arccos(x)$.

Exercice 2

Dans le chapitre 2 sur les "fonctions usuelles" nous avions présenté une parabole d'équation $y = x^2 + x + 1$.

1- Déterminer les cordonnées du point M situé à la base de cette parabole.



Exercice 3

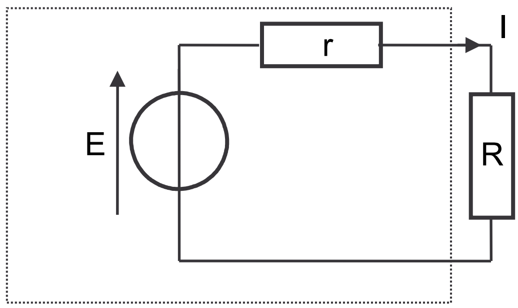
Dans le montage ci-dessous un générateur de tension fournit de l'énergie à une résistance R. Nous allons déterminer en fonction de la résistance interne r, la valeur à donner à la résistance R pour que la puissance fournie soit maximale.

1- Exprimer P, la puissance récue par R, en fonction des éléments du montage.

2- Déterminer les limites de P lorsque R tend vers 0 (court-circuit) et $+\infty$ (circuit ouvert).

3- Dériver P en fonction de la variable R. En déduire la valeur de R qui donne une puissance maximale.

4- Après avoir complété un tableau de variation, représenter la caractéristique de la courbe P=f(R).



Générateur de tension

Exercice 4

Dans l'étude des régimes transitoires d'un dipôle RC (charge d'un condensateur), on trouve la fonction suivante : $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec τ = RC

1- Faites une étude de la variation de la fonction. En déduire l'équation de la tangente à l'origine (t=0^+) puis donner une représentation graphique à cette fonction.