Lois Physiques

Chapitre 7
Primitives et Intégrales

G. MALEJACQ

I- Primitives d'une fonction

1.1- Définition

Toute fonction continue et dérivable sur un intervalle I de **R** admet des primitives sur cet intervalle. On notera F une primitive de *f* sur I si la dérivée de F est *f*. On vérifie donc $F'(x) = f(x)$.

$$f(x) \underset{\text{dérivée}}{\overset{\text{primitive}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

1.2- Propriétés

- Si f est une fonction continue sur I, elle admet sur I une infinité de primitives définies à une constante près. Si F est l'une d'entre elles, toute primitive G de *f* sur I est définie par :

$G :\ x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle

Exemple : La fonction $f : x \mapsto 10\,x + 3$ admet pour primitive sur **R** la fonction $F :\ x \mapsto 5\,x^2 + 3x$ mais aussi la fonction $F :\ x \mapsto 5\,x^2 + 3x\ + 3$

- Si f est une fonction continue sur I, il existe une unique primitive F de f, prenant une valeur donnée k au point x_0 de I.

F primitive de f et $F(x_0) = k$ avec F qui est unique

Exemple : Soit à déterminer la primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2\text{-}3x\text{+}2$ qui s'annule pour $x = 1$

L'ensemble des primitives de *f* sont les fonctions $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

La primitive de f qui s'annule pour x=1 est la fonction $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{6}$

1.3- Primitives des fonctions usuelles

f(x)	***Primitive F de f***
$f(x)=a$	$ax + C$
$f(x)=x^n$ n X N*	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+C$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$f(x)= \sin x$	$-\cos x$ +C

f(x)	***Primitive F de f***
$f(x)= \cos x$	$\sin x$ + C
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x + C$
$f(x)= \exp(x)$	$\exp(x)+C$
$f(x)= \sin (ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$f(x)= \cos (ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

1.4- Opérations sur les primitives

Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I
- $k\,F$ est une primitive de $k\,f$ sur I

Dans le tableau suivant u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	*Primitive F*
$u'\,u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$ln\lvert u\rvert$
$u'cos(u)$	$sin(u)$
$u'sin(u)$	$-cos(u)$

Fonction	*Primitive F*
$u'exp(u)$	$exp(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{n-1}\,\frac{1}{u^{n-1}}$

Exemple :

Soit à déterminer les primitives de la fonction f : $\mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Posons u(x) = cos x alors u'(x) = -sin x et $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$

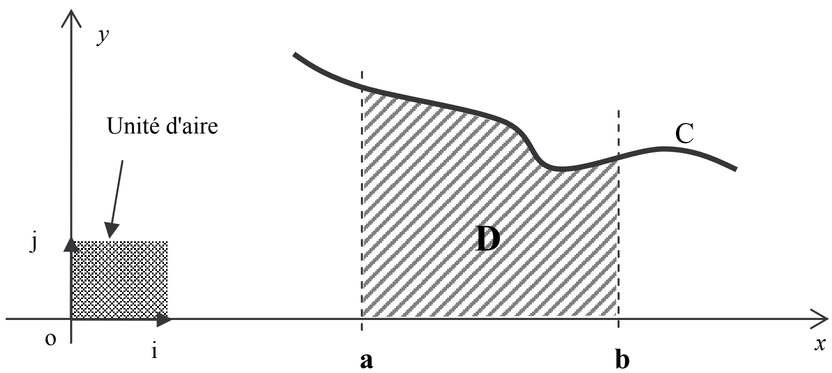
Les fonctions F(x)= $\frac{1}{\cos(x)} + C$ sont les primitives de f définies tant que $\cos(x) \neq 0$

<u>II- Intégrale</u>

2.1- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle [a, b]

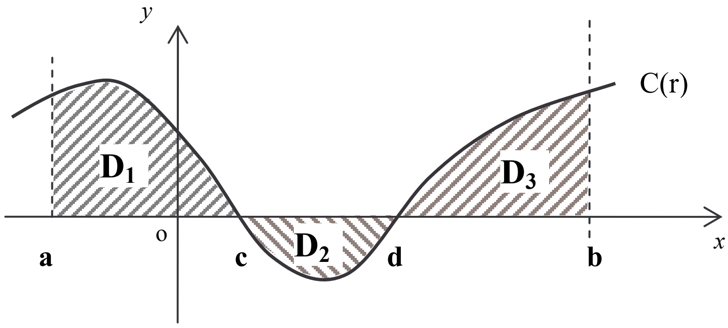
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une de ses primitives, soient a et b deux points de I. On appelle la quantité F(b) – F(a), notée aussi $\left[F(x)\right]_a^b$ l'intégrale de f entre a et b. Cette grandeur est notée $\int_a^b f(x)dx$ *(lire somme de a à b de f(x) dx)*

L'intégrale entre a et b , de la fonction f , est l'aire en unités d'aire du domaine D limité par la courbe ***(c)*** représentative de f et l'axe $0x$, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cas d'une fonction d'un signe quelconque

Si f est une fonction continue et de signe quelconque sur l'intervalle [a,b] l'aire est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses (comptées négativement).



Ainsi :

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \text{Aire } (D_1) - \text{Aire } (D_2) + \text{Aire } (D_3) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

2.2- Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Relation de Chasles **:**

Soit *f* une fonction continue sur I. Pour tout *a* , *b* et *c* de I on a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Linéarité:

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur I. Soient α et β deux réels, a et b deux points de I

$$\int_a^b \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

On appelle valeur moyenne de *f* sur [a , b] le réel $F_{\text{moy}} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Valeur efficace d'une fonction continue sur un intervalle

La valeur efficace de *f* sur [a, b] est exprimée par : $F_{eff}{}^2 = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\, dx$

Soit $F_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\, dx}$

NB : Ces deux dernières fonctions seront reprises au paragraphe 4

III- Méthodes d'intégration

3.1- Cas de figures

-Si *f(x)* est **polynôme**, on détermine aisément une primitive F de f puis $J = [F(x)]_a^b$.

-Si *f(x)* est une **fraction rationnelle** (rapport de deux polynômes), il est le plus souvent nécessaire d'effectuer une *décomposition en éléments simples* (non traitée ici).

-Si *f(x)* est un **polynôme trigonométrique**, il est souvent utile de linéariser (grâce aux formules d'Euler par exemple).

3.2- Intégration par parties

Nous pouvons calculer aisément un certain nombre de primitives comme les fonctions puissances, les fonctions trigonométriques simples. Le calcul des primitives de la forme $\int x\sin(x)dx$ est plus compliqué, la formule qui suit permettra ce type de calcul.

Formule de l'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a, b] telles que les dérivées u' et v' sont continues sur cet intervalle. Comme $(uv)'=uv'+vu'$ alors :

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{or} \quad \int_a^b (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

Il s'ensuit que $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

On pourra mémoriser cette formule sous la forme : $\boxed{\int uv' = uv - \int vu'}$

Exemple : Calcul de $A = \int_0^\pi x\sin(ax)dx$

On pose $u(x) = x$ ce qui donne $u'(x)=1$ et $v'(x)=\sin(ax)$ donc $v(x) = -\frac{\cos(ax)}{a}$

$$A = \int_0^\pi x\sin(ax)dx = \left[-\frac{x}{a}\cos(ax)\right]_0^\pi + \frac{1}{a}\int_0^\pi \cos(ax)dx = \left[-\frac{x}{a}\cos(ax)\right]_0^\pi + \frac{1}{a}\left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{a}\cos(a\pi) + \frac{1}{a^2}\sin(a\pi)$$

3.2- Méthode du changement de variable

Pour le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ on effectue le changement de la variable x par $\varphi(t)$ où $\varphi(t)$ est une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de telle sorte que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.

Les changements à réaliser sont donc :

- $f(x)$ qui devient $f(\varphi(t))$
- $d(x)$ qui devient $\varphi'(t)dt$
- a et b qui sont replacés par φ^{-1}(a) et φ^{-1}(b) (φ^{-1} : fonction inverse de φ)

$$\boxed{\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt}$$

Exemple : Calcul de $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

On pose :

$x = \cos t$

$dx = (\cos t)'dt = -\sin t\,dt$

pour $x = 0$ nous avons $\mathrm{t} = \dfrac{\pi}{2}$ et pour $x = 1$ on a $\mathrm{t} = 0$ donc :

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\left(-\sin t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \qquad \text{car} \quad 1-\cos^2 t = \sin^2 t \quad \text{et} \quad \sin t \geq 0 \ \text{sur} \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Comme $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ Il vient : $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$

IV- Application à l'électricité

4.1 Valeur moyenne d'un signal

La valeur moyenne d'un signal *v(t)* de période T est donnée par : $V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt$

Remarque V_{moy} est souvent notée $\overline{\mathrm{V}}$

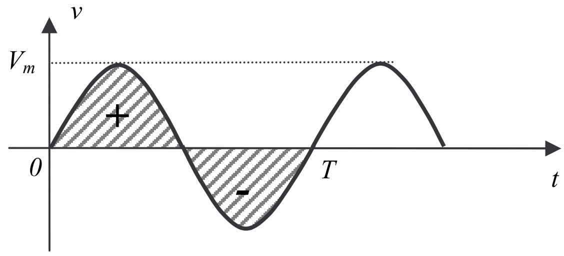
Exemples :

a) Considérons une tension alternative ayant pour fonction $v(t) = \mathrm{V_m}\sin(\omega t)$ *ω est une constante* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{V_m}\sin(\omega t)dt = \frac{\mathrm{V_m}}{T}\left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^T = \frac{\mathrm{V_m}}{T\omega}\left[-\cos(\omega T) + \cos 0\right]$$

Or $\cos(\omega T) = \cos\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(2\pi) = 1$ On a donc $\mathrm{V_{moy}} = 0$

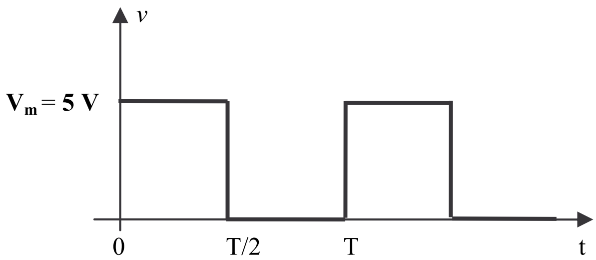
La valeur moyenne d'une grandeur alternative sinusoïdale est nulle. Nous avons bien sur une période deux alternances symétriques par rapport à l'axe O*x*. Le calcul de l'intégrale additionne les aires correspondantes à ces deux alternances.



b) Considérons un signal carré de 5 V d'amplitude

$v(t) = \mathrm{V_m} = 5$ V de t = 0 à $t = \frac{T}{2}$

$v(t) = 0$ V pour $t > \frac{T}{2}$



$$V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V_m dt + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T 0dt}_{=0} = \frac{\mathrm{V_m}}{T}\left[t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{\mathrm{V_m}}{T}\left[\frac{T}{2}\right] = \frac{\mathrm{V_m}}{2} = 2{,}5 \text{ V}$$

4.2 Valeur efficace d'un signal

Le carré de la valeur efficace d'un signal *v(t)* de période T est la valeur moyenne de $v^2(t)$ encore appelée valeur quadratique moyenne : $V^2_{eff} = V^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt$

On notera V (en majuscule) la valeur efficace de v(t)

Exemple :

Considérons la tension alternative ayant pour fonction $v(\mathrm{t}) = \mathrm{V_m}\sin(\omega \mathrm{t})$ $\quad \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

$$V^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{V^2{}_m}\sin^2(\omega t)dt = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{T}\int_0^T \left(\frac{1-\cos(2\omega \mathrm{t})}{2}\right)dt = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{2T}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]_0^T$$

$$V^2 = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{2T}\left[T - \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega} - 0 + \underbrace{\frac{\sin(0)}{2\omega}}_{0}\right] = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{2T}\left[T - \frac{\sin\left(2\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)T\right)}{2\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)}\right] = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{2T}\left[T - \underbrace{\frac{\sin(4\pi)}{\left(\frac{4\pi}{\mathrm{T}}\right)}}_{0}\right] = \frac{\mathrm{V^2{}_m}}{2}$$

La valeur efficace est donc $V = \dfrac{\mathrm{V_m}}{\sqrt{2}}$

Comme vous le savez, la tension électrique délivrée par EDF a une valeur efficace de 230 V. D'un point de vue énergétique cette tension alternative sinusoïdale est donc <u>aussi efficace</u> qu'une tension continue de 230 V. La valeur maximale V_m est 230 $\sqrt{2}$ = 325 V.

4.3 Facteur de crête

Le facteur de crête d'un signal est donné par $f_c = \dfrac{V_{\max}}{V_{eff}} = \dfrac{V_{\max}}{V}$

Le facteur de crête d'un signal sinusoïdale est égal à $\sqrt{2}$

4.4 Facteur de forme

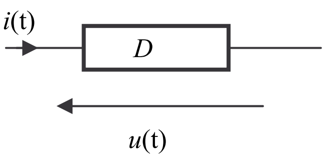
Le facteur de forme d'un signal est donné par $F = \dfrac{V_{eff}}{V_{moy}} = \dfrac{V}{\overline{V}}$

La valeur efficace d'un signal est toujours supérieur ou égale à la valeur moyenne, le facteur de forme est donc toujours supérieur ou égal à 1 *(le facteur de forme d'un signal continu est égal à 1)*

4.5 Puissance moyenne

Considérons un dipôle quelconque parcouru par les grandeurs électriques suivantes :

$$i(t) = I_m\cos(\omega\, t + \varphi)$$
$$u(t) = U_m\cos\omega\, t$$



La puissance instantanée est *p(t)=u(t).i(t)*, le calcul de la puissance moyenne nécessite une intégrale.

D'après la définition d'une grandeur moyenne :

$$P = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T u(t)i(t) \quad \mathrm{dt}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) \quad \mathrm{dt}$$

$$P = \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) \quad \mathrm{dt}$$

<u>*Rappel*</u> : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$

Donc :

$$P = \frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T \left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right] \quad \mathrm{dt}$$

$$P = \frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T \cos\varphi \quad \mathrm{dt} \quad + \underbrace{\frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \quad \mathrm{dt}}_{=0}$$

$$P = \frac{U_m I_m}{2T}(\cos\varphi)T$$

$$P = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$$

On remarque que $\frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.\frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_{eff} I_{eff} = U\ I$

La formule $P = UI\cos\varphi$ est effectivement celle de la puissance active considérée en régime sinusoïdal; nous l'utiliserons dans un chapitre de l'unité de valeur PHR002.