Lois Physiques

Chapitre 3

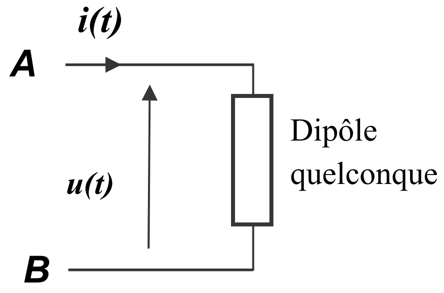
La puissance en régime sinusoïdal

G. MALEJACQ

La puissance en régime sinusoïdal

1- Rappels.

La **puissance** est l'énergie fournie à un système par un autre par unité de temps. Cette notion est définie électriquement par le produit du courant et de la tension, la formule connue par tous étant P=UI. Nous allons ici adapter cette expression à la singularité d'un signal alternatif sinusoïdal.



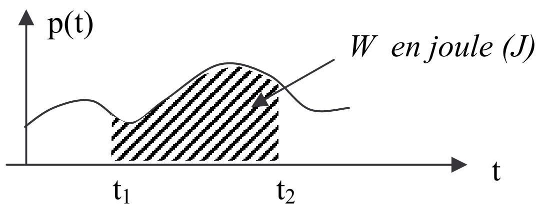
1.1 Puissance instantanée.

La formule $\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t)}$ donne, pour une convention récepteur avec i entrant, la puissance instantanée qui s'exprime en Watt (W). Une valeur positive de *p(t)* indique que le dipôle est récepteur d'énergie sinon il est générateur d'énergie.

1.2 Energie définie pendant un temps Δt.

L'énergie mise en jeu sur une durée t_2-t_1 par un dipôle quelconque est définie par la relation suivante :

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt}$$



Cette énergie est matérialisée par l'aire située sous la courbe représentant la puissance instantanée.

1.3 Puissance moyenne.

La puissance moyenne reçue par un dipôle traversé par un courant périodique est la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période du signal. Cette puissance, exprimée en Watt est aussi appelée ***puissance active ou puissance réelle***.

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt}$$

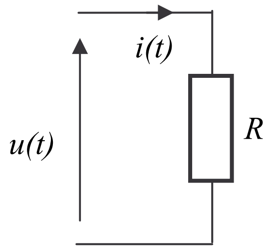
⚠ *Remarque : C'est à partir de cette formule qu'il est défini la notion de valeur efficace des tensions et courants alternatifs. Par la suite nous noterons **en majuscule les grandeurs efficaces des courants et tensions**.*

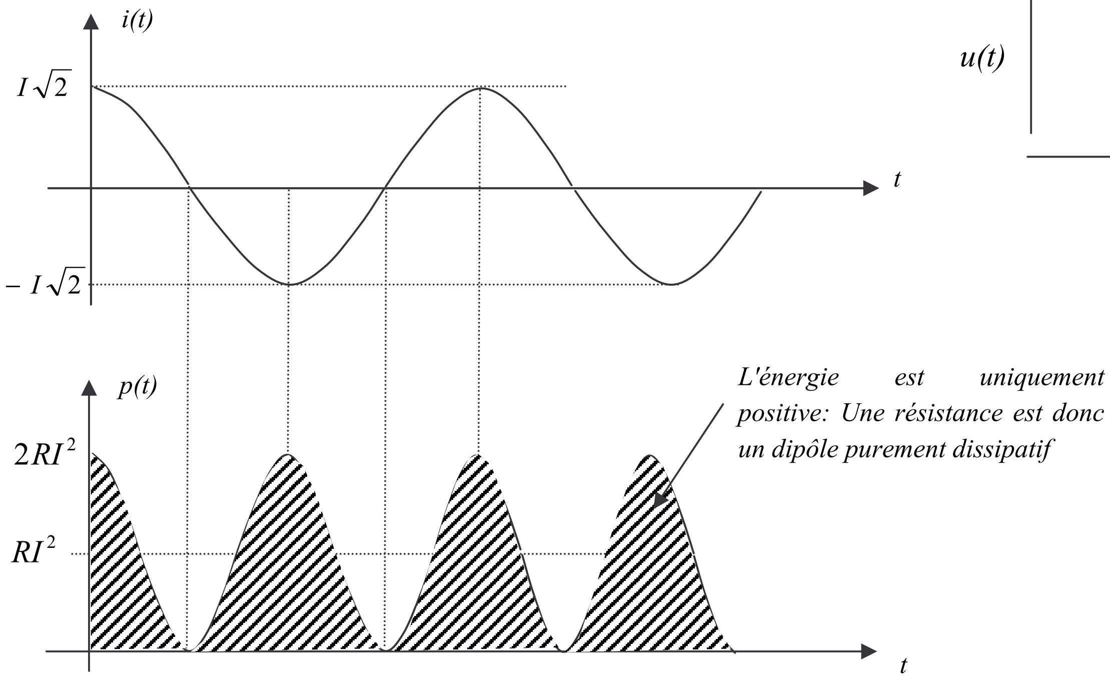
$$I = I_{eff} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \qquad U = U_{eff} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \ldots$$

1.4 Calcul de la puissance active pour les composants R, C et L.

1.4.1 Cas d'une **résistance *R*** traversée par un courant alternatif sinusoïdal $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega\, t)$

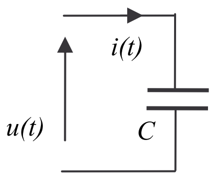
$$p(t) = u(t).i(t) = (R.i(t))\,.\,i(t) = Ri^2(t) = RI^2\,2\cos(\omega\, t)^2 = RI^2(1+\cos(2\omega\, t))$$





La puissance reçue évolue à une fréquence deux fois plus élevée que celle du courant et est toujours positive. Nous observons sur ce graphe que la valeur moyenne de *p(t)* est $\boxed{P = R\, I^2}$

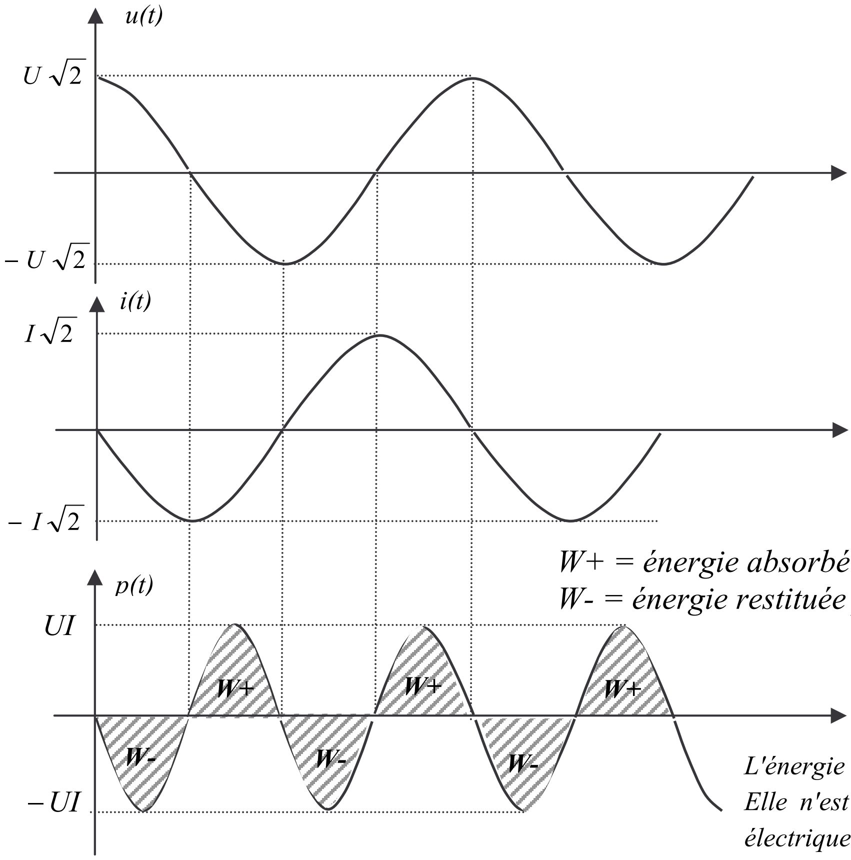
1.4.2 Cas d'un **condensateur C** ayant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega\, t)$. Le courant le traversant est $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} = -CU\sqrt{2}\omega\sin(\omega\, t)$



Comme $I = C\omega\, U$ (cf. cours sur les impédances complexes) $i(t) = -I\sqrt{2}\sin(\omega\, t)$.

La puissance active est alors : $p(t) = u(t)i(t) = -UI\,2\cos(\omega\, t)\sin(\omega\, t) = -UI\sin(2\omega\, t)$

Dans les chronogrammes de la page suivante nous observons qu'en régime permanent, la puissance instantanée varie à une fréquence deux fois plus élevée que celle de la tension. La puissance moyenne est nulle car $P = -\dfrac{UI}{T}\displaystyle\int_0^T \sin(2\omega t)dt = 0$



W+ = énergie absorbée par le condensateur
W- = énergie restituée par le condensateur

L'énergie est alternativement négative et positive. Elle n'est donc pas dissipée et reste sous forme électrique. La puissance active est nulle.

1.4.3 Cas d'une bobine ayant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$. Le courant la traversant est $i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int u(t)dt = \dfrac{U}{L\omega}\sqrt{2}\sin(\omega t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)$ *car* $I = \dfrac{U}{L\omega}$

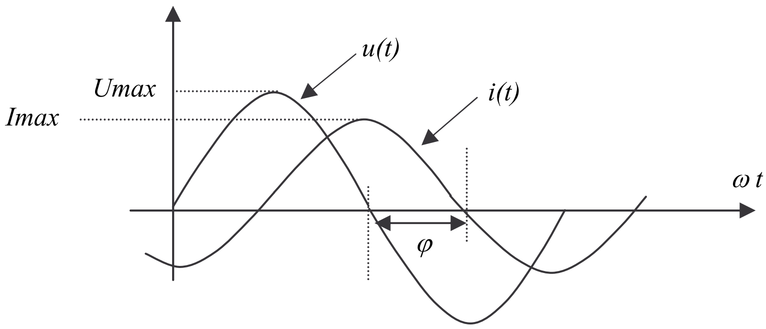
La puissance instantanée est ainsi *$p(t) = UI\sin(2\omega t)$* et présente des caractéristiques semblables à celles décrites pour le condensateur.

2- Puissance en régime sinusoïdal.

2.1 Puissance active.

Considérons une tension et un courant sinusoïdal définis par les fonctions suivantes :

$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ *φ est le déphasage de u(t) par rapport à i(t)*



$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

L'expression de la puissance instantanée est :

$$p(t) = u(t)i(t) = U\sqrt{2}I\sqrt{2}\sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)$$
$$p(t) = UI\left(\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right)$$

La fonction *p(t)* comprend une composante constante $U\,I\cos\varphi$ et une composante sinusoïdale d'amplitude UI et de fréquence double de celle du courant et de la tension.

Le premier terme *(cos* φ) correspond à la valeur moyenne de la puissance et traduit un échange d'énergie unidirectionnel entre une source et une charge. Le second terme *(cos 2ω t*) correspond à une composante alternative (aussi appelée fluctuante) qui varie sinusoïdalement avec une amplitude $U\,I$ et de valeur moyenne nulle.

La puissance active s'écrit ainsi :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{UI}{T}\left[\int_0^T \cos\varphi.dt - \int_0^T \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi)dt}_{=0}\right] = \frac{UI}{T}\int_0^T \cos\varphi.dt$$

On retiendra : $\boxed{P = UI\cos\varphi = \frac{U_{\max}I_{\max}}{2}\cos\varphi}$ Unité : [W] (Watt)

2.2 Puissance apparente.

L'amplitude des fluctuations de la puissance instantanée par rapport à sa valeur moyenne est appelée puissance apparente ***S*** et définie par la relation simple suivante :

$\boxed{S = U\,I}$ Unité : [VA] (Volt-Ampère)

Elle correspond au produit des valeurs efficaces de la tension et du courant et s'exprime conventionnellement pour la distinguer en *VA* et non en Watt. Ce produit est apparemment une puissance mais ne fournit pas nécessairement un travail, d'où son nom de puissance apparente.

2.3 Puissance réactive.

Définition : $\boxed{Q = U\,I\sin\varphi}$ Unité : [VAR] (Volt-Ampère-Réactif)

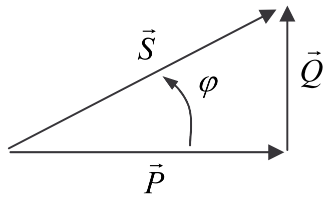
C'est une puissance qui n'a pas de signification physique. La notion de puissance réactive est utile pour caractériser clairement la nature d'un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R+jX$. Pour une charge essentiellement inductive (réactance X positive), le déphasage φ est positif, de même que le $\sin\varphi$ et la puissance réactive absorbée par la charge est conventionnellement positive. Pour une charge essentiellement capacitive (réactance X négative), le déphasage φ est négatif et la puissance réactive absorbée est aussi négative.

2.4 Relation entre les puissances.

A l'aide des formules de trigonométrie on démontre aisément que :

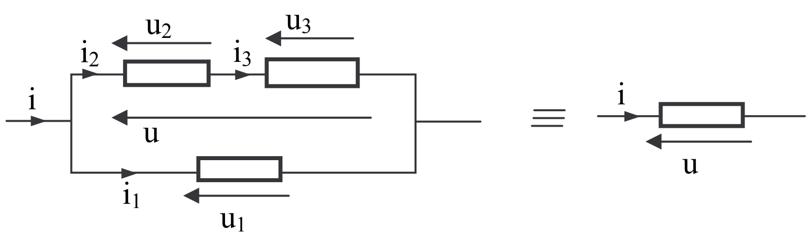
$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{Q}{P}} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}}$$

Ce qui peut être schématisé par le diagramme de Fresnel des puissances *(triangle des puissances)*



<u>*Enoncé du théorème de Boucherot*</u>

Les puissances instantanées, actives et réactives absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances instantanées, actives et réactives absorbées par chaque élément du groupement.



$p(t)=u(t)i(t)=u_1(t)i_1(t)+ u_2(t)i_2(t)+ u_3(t)i_3(t)$ → Les puissances instantanées s'ajoutent.

$P=UI\cos\varphi=P_1+ P_2+ P_3= U_1I_1\cos\varphi_1+ U_2I_2\cos\varphi_2+ U_3I_3\cos\varphi_3$ → Les puissances actives s'ajoutent.

$Q=UI\sin\varphi=Q_1+ Q_2+ Q_3= U_1I_1\sin\varphi_1+ U_2I_2\sin\varphi_2+ U_3I_3\sin\varphi_3$ → Les puissances réactives s'ajoutent.

Remarque importante : Le théorème de Boucherot n'est pas valable pour la puissance apparente.

2.5 Application aux impédances et admittances complexes.

Soit un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R + jX$ — R : Résistance du dipôle (Ω)
X : Réactance du dipôle (Ω)

Soit un dipôle d'admittance $\underline{Y} = G + jB$ — G : Conductance du dipôle (S)
X : Susceptance du dipôle (S)

Le tableau suivant résume l'expression des puissances actives et réactives

	Puissance active P=UIcosφ	Puissance réactive Q=UIsinφ
$\underline{Z} = R + jX$	**RI^2**	**XI^2**
$\underline{Y} = G + jB$	**GU^2**	**$-BU^2$**
Résistance pure	**RI^2**	**0**
Inductance pure	**0**	**$L\omega I^2 = U^2/L\omega$**
Capacité pure	**0**	**$-I^2/C\omega = -U^2C\omega$**

2.6 Facteur de puissance.

2.6.1 Définition générale.

On appelle la quantité $k = \frac{P}{S}$ le facteur de puissance d'un système électrique. Il est sans dimension.

2.6.2 Cas particulier du régime sinusoïdal.

En régime permanent sinusoïdale le facteur de puissance est $\boxed{k = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi}$

2.6.3 Importance du cos φ.

Pour des raisons économiques, une installation électrique industrielle doit consommer le moins d'énergie possible. Il faut donc réduire les pertes par effet joule qui dépendent du courant ($P_j=RI^2$) sans diminuer la puissance P imposée par la charge (installation électrique qui absorbe la puissance). Comme $I = \frac{P}{U\cos\varphi}$, on recherche donc à avoir un $\cos\varphi$ le plus proche possible de 1 en tentant de **relever le facteur de puissance**.

La méthode consiste à joindre à l'installation électrique un composant pouvant modifier la puissance réactive Q (et donc $\cos\varphi$) sans modifier la puissance active P. Ces composants sont le condensateur ou la bobine parfaite.

2.6.4 Relèvement du facteur de puissance.

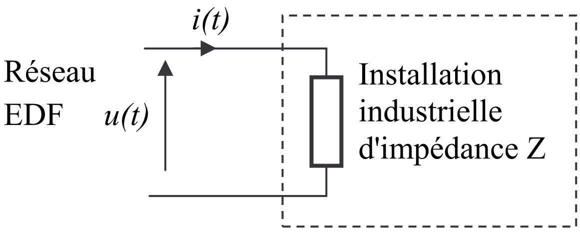
Si l'installation électrique est inductive ($Q > 0$), il faut diminuer Q en adjoignant des condensateurs de telle sorte que $Q + Q_C < Q$.

Si l'installation électrique est capacitive ($Q < 0$), il faut augmenter Q en adjoignant des inductances de telle sorte que $Q < Q + Q_L$.

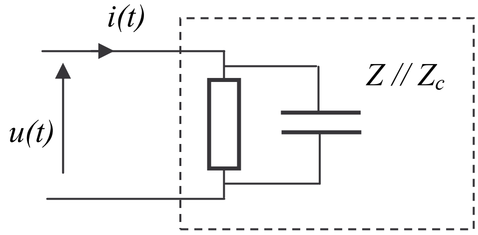
2.6.5 Méthode.

Dans la plupart des situations la charge est de type inductive (présence de transformateurs, de moteurs…). Pour relever son facteur de puissance il faut donc y ajouter en parallèle un condensateur.

L'objectif est de dimensionner le condensateur en fonction du facteur de puissance recherché.



Sans correction



Avec correction

Le tableau suivant présente le bilan des puissances entre les deux montages : Notez que la puissance active ne change pas.

	Puissance active	**Puissance réactive**	**Déphasage ou facteur de puissance**
Charge seule	P	Q=P tan φ	On a cos φ
Condensateur seul	0	$Q_c = -C\omega\, U^2$	$-\dfrac{\pi}{2}$
Charge plus condensateur	P	$Q' = Q+Q_c = P \tan \varphi'$	On veut cos φ'

Les éléments de la colonne des puissances réactives nous permettent de calculer la valeur de la capacité du condensateur à insérer :

$Q_c = Q' - Q$ soit $-C\omega\, U^2 = P \tan\varphi' - P\tan\varphi$ d'où $\boxed{C = \dfrac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2}}$

2.7 Facteur de qualité.

2.7.1 Définition.

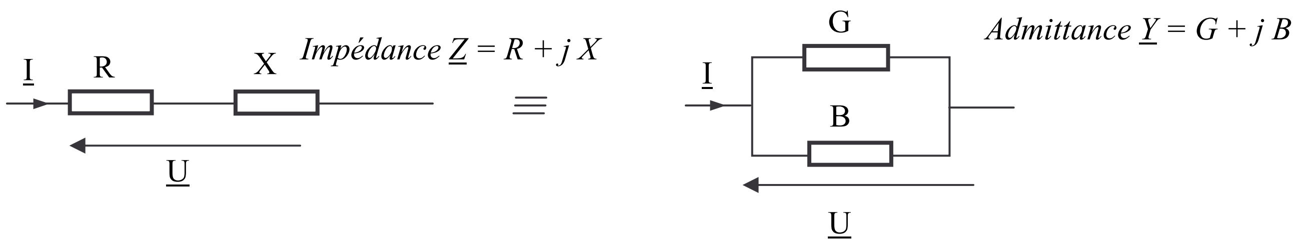
On caractérise "la qualité réactive" d'un dipôle passif par son facteur de qualité par le rapport $Q = \dfrac{|puissance\ réactive|}{puissance\ active}$

Pour un dipôle d'impédance $\underline{Z} = R + j X$ le facteur de qualité est : $Q = \dfrac{|X\, I^2|}{R\, I^2} = \dfrac{|X|}{R}$

Pour un dipôle d'admittance $\underline{Y} = G + j B$ le facteur de qualité est : $Q = \dfrac{|-B\, U^2|}{G\, U^2} = \dfrac{|B|}{G}$

2.7.2 Relation entre les paramètres R, X, G, B d'un dipôle et son facteur de qualité.

Soit à définir une équivalence entre une association série et parallèle :



$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB \quad \text{d'où} \quad G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{et } B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

En posant $Q = \dfrac{X}{R}$ il vient $\boxed{G = \dfrac{1}{R(1+Q^2)} \quad \text{et } B = \dfrac{-1}{X(1+\dfrac{1}{Q^2})}}$ si $Q > 10$ alors $G \approx \dfrac{1}{RQ^2}$; $B \approx \dfrac{-1}{X}$